

Chapitre 6: Calcul d'intégrales et de primitives-résumé de cours

Dans ce chapitre I désigne un intervalle de \mathbb{R} non trivial et \mathbb{K} l'ensemble des réels ou des complexes.

1. Des rappels

1.1 Primitive

Déf: Soit f et F des fonctions de I dans \mathbb{K} , F est une primitive de f sur I lorsque F est dérivable sur I et $\forall x \in I, F'(x) = f(x)$.

Proposition 6.1 : Si f admet une primitive sur I alors elle en admet une infinité toutes égales à une constante près.

Proposition 6.2: Soit f et $g \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})$, F une primitive de f sur I et G une primitive de g sur I .

① $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, (\alpha F + \beta G)$ est une primitive de $(\alpha f + \beta g)$ sur I .

② $\text{Re}(F)$ (resp. $\text{Im}(F)$) est une primitive sur I de $\text{Re}(f)$ (resp. $\text{Im}(f)$).

★ Primitives usuelles : cf fiche en annexe

★ Recherche d'une primitive de f par transformation d'expressions

Exemple 1 : $f : t \mapsto \frac{1}{t^2 - 1}$ on décompose en éléments simples

Exemple 2 : $f : x \mapsto \tan^2 x$ on fait apparaître une primitive usuelle

Exemple 3 : $f : t \mapsto \sin^4 t$ on linéarise

Exemple 4 : $f : t \mapsto \cos^2 t \sin^3 t$ on fait apparaître $u \cdot u^n$

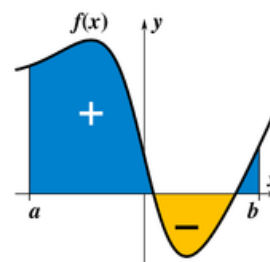
Cette méthode peut remplacer la linéarisation pour les produits du type $\cos^p x \sin^q x$ avec p ou q impairs.

Exemple 5 : $f : x \mapsto \cos(\omega x) e^{\alpha x}$ ou $f : x \mapsto \sin(\omega x) e^{\alpha x}$ avec ω et α réels

on utilise $f(x) = \text{Re}(e^{(\alpha+i\omega)x})$ ou $\text{Im}(e^{(\alpha+i\omega)x})$

1.2 Intégrale d'une fonction continue sur un segment

Rappel: Soit $a, b \in \mathbb{R}, a \leq b$ et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, une fonction continue. Comme en Terminale, nous considérons pour l'instant que l'intégrale de a à b de f est le réel noté $\int_a^b f(t) dt$ qui est égal à l'aire algébrique du domaine délimité par la courbe représentative de f , l'axe (Ox) et les droites $x = a$ et $x = b$, exprimée en unité d'aire



• **Extension à deux réels a et b quelconque :** Si $b < a$, on pose $\int_a^b f(t) dt = -\int_b^a f(t) dt$

• **Extension aux fonctions à valeurs complexes :** Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{C})$ est continue, pour tout réel a et b de I , on pose $\int_a^b f(t) dt = \int_a^b \text{Re}(f)(t) dt + i \int_a^b \text{Im}(f)(t) dt$

L'intégrale de Riemann sera définie formellement et étudiée dans un chapitre ultérieur

★ **Remarque :** La variable d'intégration est muette i.e. $\int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(u) du = \dots$

Proposition 6.3 : Propriétés de l'intégrale:

Soit f et g continues sur I à valeurs dans \mathbb{K} et a, b et c trois réels de I .

$$\textcircled{1} \int_a^a f(t)dt = 0 \text{ et } \int_a^b f(t)dt = -\int_b^a f(t)dt \quad \text{Convention}$$

$$\textcircled{2} \text{ Relation de Chasles: } \int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt \quad \text{admis ici}$$

$$\textcircled{3} \text{ Linéarité: } \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \int_a^b [\alpha f(t) + \beta g(t)]dt = \alpha \int_a^b f(t)dt + \beta \int_a^b g(t)dt \quad \text{admis ici}$$

$$\textcircled{4} \text{ Positivité: Si } a \leq b \text{ et } f \geq 0 \text{ sur } [a, b] \text{ alors } \int_a^b f(t)dt \geq 0 \quad \text{admis ici}$$

$$\textcircled{5} \text{ Croissance de l'intégrale: Si } a \leq b \text{ et } f \leq g \text{ sur } [a, b] \text{ alors } \int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b g(t)dt$$

$$\textcircled{6} \text{ Inégalité triangulaire: Si } a \leq b \text{ alors } \left| \int_a^b f(t)dt \right| \leq \int_a^b |f(t)|dt$$

1.3 Lien entre intégrales et primitives d'une fonction

Théorème fondamental de l'analyse : Soit f une fonction continue sur I à valeurs dans \mathbb{K} ,

$F : x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ est l'unique primitive de f sur I qui s'annule en a .

Admis dans ce chapitre

★ Conséquences :

- Toute fonction continue sur I admet une infinité de primitives sur I .

Soit a fixé dans I , l'ensemble des primitives de f sur I est $\{ x \mapsto \int_a^x f(t)dt + k, k \text{ décrit } \mathbb{K} \}$.

Soit G une primitive quelconque de f sur I et $a \in I$, on a : $\forall x \in I, G(x) = G(a) + \int_a^x f(t)dt$

- Si f est continue sur I , la notation : $\int^x f = \int^x f(t)dt$ désigne une primitive quelconque de f

sur I . Par exemple, $\int^x e^{-t} dt = -e^{-x}$

- Voici quelques exemples de fonctions dont il ne faudra pas chercher à calculer une primitive. En effet, il est impossible d'expliciter leurs primitives à l'aide des fonctions usuelles :

$$x \mapsto e^{\pm x^2} \quad x \mapsto \frac{1}{\ln x} \quad x \mapsto \frac{\sin x}{x}.$$

On utilisera la notation $x \mapsto \int^x e^{t^2} dt$ pour exprimer une primitive de $x \mapsto e^{x^2}$

Corollaire 6.1 : Soit f une fonction continue sur I ,

$\forall a, b \in I, \int_a^b f(t)dt = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a)$ où F est une primitive quelconque de f sur I .

Application : Calcul d'intégrale à l'aide d'une primitive :

$$I_1 = \int_2^5 (x^2 - 7x + 3)dx$$

$$I_2 = \int_{-2}^2 \sqrt{t+2} dt$$

$$I_3 = \int_{-1}^2 \frac{x}{(x^2+1)^3} dx$$

$$I_4 = \int_1^2 \frac{e^x}{e^x - 1} dx$$

$$I_5 = \int_0^\pi \sin(2t)e^{\sin^2 t} dt$$

$$I_6 = \int_{-\frac{\pi}{4}}^0 \tan x dx$$

$$I_7 = \int_0^\pi \cos^2 t dt$$

$$I_8 = \int_0^\pi \cos^2 t \sin^3 t dt$$

$$I_9 = \int_e^{e^2} \frac{du}{u \ln(u)}$$

2. Formule d'intégration par parties.

Théorème 6.1: Si u et v sont deux fonctions de classe C^1 sur I alors

$$\forall x \in I, \int^x u(t)v'(t)dt = u(x)v(x) - \int^x u'(t)v(t)dt$$

Remarque : L'application de cette formule au calcul d'intégrale donne

Si u et v sont deux fonctions de classe C^1 sur I alors

$$\forall a, b \in I, \int_a^b u(t)v'(t)dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)dt$$

Exemples classiques d'utilisation

• Où on dérive la puissance et on intègre exp : $\int_0^1 x e^x dx$

↑
↓

• Où on intègre la puissance et on dérive ln : $\int_1^x t^2 \ln t dt$

↑
↓

• Où on fait apparaître la formule : $\forall x > 0, \int^x \ln t dt = \int^x 1 \times \ln t dt$

↑
↓

3. Formule de changement de variable

3.1 Le théorème

Théorème: Soit f continue sur I et $\varphi : [a, b] \rightarrow I$, de classe C^1 sur $[a, b]$.

$$\text{On a } \int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)dt$$

3.2 Application au calcul d'intégrales et de primitives:

Méthode :

- On choisit le changement de variable, attention φ doit être de classe C^1 sur $[a, b]$.
- On échange t et $\varphi(x)$
- On échange dt et $\varphi'(x)dx$.
- On modifie les bornes de l'intégrale.

♥ Un changement de variable à connaître

Lorsqu'on cherche les primitives d'un quotient de fonctions trigonométriques il faut penser au changement de variable $u = \tan(t/2)$ et utiliser les formules de trigonométries associées

Exemple : On veut expliciter une primitive de $f : x \mapsto \int^x \frac{dt}{1 + \sin t}$ sur $I = [0, \pi]$

On pose $u = \tan(t/2) = \varphi(t)$. φ est bien de classe C^1 sur I .

$$\text{On a } t \left| \begin{array}{l} x \\ \text{donc } u \end{array} \right| \tan(x/2) \quad \text{et } du = \varphi'(t)dt = \frac{1 + \tan^2(t/2)}{2} dt = \frac{1 + u^2}{2} dt \quad \text{et donc } dt = \frac{2u}{1 + u^2} du$$

$$F(x) = \int^x \frac{dt}{1 + \sin t} \underset{u = \tan(t/2)}{=} \int^{\tan(x/2)} \frac{1}{1 + \frac{2u}{1 + u^2}} \times \frac{2}{1 + u^2} du = \int^{\tan(x/2)} \frac{1}{(1 + u)^2} du = \left[-\frac{1}{1 + u} \right]^{\tan(x/2)}$$

Une primitive de f sur I est donc $F : x \mapsto \frac{-1}{1 + \tan(x/2)}$.