Exercices - Chapitre 6: Calcul d'intégrales et de primitives

Calculer et rédiger

♥ **6.1**. Calculer les intégrales suivantes en utilisant la formule d'intégration par parties :

$A=\int_1^2(2t+1)\ln t.dt$ $\quad B=\int_{-1}^1 te^{2t}dt$ $\quad C=\int_0^1(x^2-2x)e^{3x}dx$ $\quad D=\int_0^1\ln(t+1)dt$

$E=\int_{-1}^1 e^x\sin x.dx$ $\quad F=\int_0^1 t^2\sqrt{1-t}dt$ $\quad G=\int_0^{\frac{\pi}{2}}t\sin^3(t)dt$

♥ **6.2**. Calculer les intégrales suivantes en utilisant le changement de variable indiqué :

$A=\int_0^{\pi/4}\tan^3 t dt$ en posant $\cos t = x$ $\qquad B=\int_0^1\frac{dx}{1+e^x}$ en posant $e^x=t$

$C=\int_0^1\frac{x^2}{(x^2+1)^3}dx$ en posant $x=\tan(u)$ $\qquad D=\int_1^2\frac{2u}{\sqrt{1+u}}du$ en posant $x=\sqrt{1+u}$

$E=\int_0^{\pi/4}\frac{1}{\cos x}dx$ en posant $t=\sin x$ $\qquad \cancel{F=\int_0^1\frac{\sqrt{t}}{t+1}dt \text{ en posant } u=\sqrt{t}}$

♥ **6.3** Calculer une primitive des fonctions suivantes en précisant un intervalle de validité.

$f_1: x\mapsto\frac{x^3}{(1+x^4)^2}$ $\quad f_2: x\mapsto x\tan^2 x$ $\quad f_3: x\mapsto\sin^5 x$ $\quad f_4: x\mapsto\frac{\sin(2x)}{1+\cos^2 x}$

$f_5: t\mapsto\frac{1}{t\ln^2 t}$ $\quad f_6: t\mapsto\cos^4 t\sin^2 t$ $\quad f_7: t\mapsto\frac{1}{1+\cos t}$ $\quad f_8: t\mapsto\left(t^2-t+3\right)e^{2t}$

$f_9: x\mapsto e^x\sin x$ $\quad f_{10}: x\mapsto\frac{1}{\sin x}$ $\quad f_{11}: x\mapsto\frac{e^x}{e^{2x}-1}$ $\quad f_{12}: x\mapsto x^3\sin x$

6.4 ***Cas des fractions rationnelles***

a. Déterminer les réels a, b et c tels que $\forall x\in\mathbb{R}\backslash\{0, 1/2\}$, $\frac{2x+1}{x^2(2x-1)}=\frac{a}{x}+\frac{b}{x^2}+\frac{c}{2x-1}$

puis déterminer une primitive de $f: x\mapsto\frac{2x+1}{x^2(2x-1)}$ sur $\mathbb{R}\backslash\{0, 1/2\}$.

b. Déterminer les réels a, b et c tels que $\forall x\in\mathbb{R}$, $\frac{x^3+2x}{x^2+1}=ax+\frac{bx+c}{x^2+1}$

puis déterminer une primitive de $g: x\mapsto\frac{x^3+2x}{x^2+1}$ sur $\mathbb{R}$.

♦ **6.5** Calculer les intégrales suivantes après avoir rapidement justifié leurs existences.

$I_1=\int_1^2\frac{\ln x}{x}dx$ $\quad I_2=\int_1^4\frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx$ $\quad I_3=\int_0^\pi\left|\cos t+\frac{1}{2}\right|dt$ $\quad I_4=\int_0^2 e^{|x-1|}dx$

$I_5=\int_0^2 xe^{-x^2}dx$ $\quad I_6=\int_0^{\pi/3}\frac{x}{\cos^2 x}dx$ $\quad I_7=\int_0^\pi x^3\sin x dx$ $\quad I_8=\int_0^x\sup(\frac{1}{2},t)dt$

$I_9=\int_0^2\sqrt{4-x^2}dx$ $\quad I_{10}=\int_{-1}^1\left(\sqrt{1-t^3}-\sqrt{1+t^3}\right)dt$ $\quad I_{11}=\int_0^\pi e^{-2x}\sin(3x)\,dx$

$I_{12}=\int_1^2(\ln x)^2dx$, *en posant* $u=\ln x$

Chercher, calculer et rédiger

♥ **6.6** On pose $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{\cos t + \sin t} dt$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{\cos t + \sin t} dt$

a. Justifier l'existence de I et de J puis calculer I + J.

b. Montrer que I = J et en déduire les valeurs de I et de J

c. En déduire la valeur de l'intégrale $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}+t}$

♥ **6.7 *Intégrales de Wallis***

Pour tout entier naturel n, on pose $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t dt$

a. Calculer I_0 et I_1, puis justifier, à l'aide d'un changement de variable que :

$\forall n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t dt$

b. En utilisant la formule d'intégration par parties, démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$.

c. Donner une expression de I_n à l'aide de factorielles en distinguant les cas n = 2p et n = 2p + 1

6.8 Soit f une fonction continue sur [a, b]. Montrer que $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a+b-x)dx$.

En déduire la valeur de $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan x)dx$

6.9 On cherche à obtenir les primitives de $f : x \mapsto \frac{1}{1-\cos x}$.

a. Sur quels intervalles f admet-elle des primitives ?

b. Soit $x \in]0,\pi[$, montrer qu'on peut poser $u = \tan\frac{t}{2}$ dans $\int^x \frac{dt}{1-\cos t}$ et appliquer ce changement de variable.

c. Calculer pour $\int^x \frac{dt}{1-\cos t}$ $x \in]\pi, 2\pi[$.

d. Déterminer les primitives de f sur]0, 2π[

6.10 Calculer la valeur du $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin x + \cos x}$ en transformant le dénominateur.

6.11 Pour $(n, p) \in \mathbb{N}^2$, on pose $I_{n,p} = \int_0^1 t^n (1-t)^p dt$

a. Calculer $I_{2,1}$

b. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall p \in \mathbb{N}$, $I_{n,p} = \frac{n}{p+1} I_{n-1,p+1}$

c. En déduire une expression de $I_{n,p}$ en fonction de n et de p.