Chapitre 7: Equations différentielles-poly de cours

Dans ce chapitre I désigne un intervalle non trivial et $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Introduction : Notion d'équations différentielles :

Une équation différentielle (E) est une équation dont l'inconnue est une fonction le plus souvent notée y ou z, dérivable au moins une fois sur I. Cette équation doit nécessairement faire apparaître au moins une dérivée de la fonction inconnue.

Résoudre ou intégrer (E) sur I c'est trouver toutes les fonctions f solutions de (E) sur I.

Exemples : (E_1) : $y' = \dfrac{1}{x\ln x}$ (E_2) : $y' + y = e^t$ (E_3) : $y' + 2y = 3$ et $y(1) = 2$

(E_4) : $2y'' + 3y' + y = 0$ (E_5) : $xz' + z = 1$ (E_6) : $t^2x'' + (1+t)x - 2 = 0$

(E_7) : $\dfrac{dC_A}{dt} = -kC_A$

Vocabulaire :

★ Le terme ne contenant ni y, ni ses dérivées est appelé **second membre** de l'équation.

★ On dit que (E) est **homogène** (ou **sans second membre**) lorsque le second membre est nul.

★ On dit que (E) est **linéaire** lorsque son équation homogène associée (H) vérifie la propriété :
Si et g sont solution de (H) alors pour tous réels α et β, la fonction $h = \alpha f + \beta g$ est aussi solution de (H).

★ Les représentations graphiques des solutions de (E) sont appelées **courbes intégrales** de (E).

★ Une solution f de (E) est une **solution particulière** de (E).

★ On peut de plus imposer à y ou à une de ses dérivées de prendre une valeur donnée en un point donné : ce sont **les conditions initiales.**

Exemple fondamental: Déterminer les primitives de f sur I revient à résoudre l'équation différentielle $y' = f$

---

1. Equations différentielles linéaires du 1er ordre

1.1 Généralités

Def : On appelle équation différentielle linéaire du 1er ordre, toute équation pouvant s'écrire sous la forme: $\boxed{y' + a(x)y = b(x) \ (E)}$ *forme normalisée*
où a et b désignent des fonctions continues d'un intervalle I dans $\mathbb{K}$.

Exemples : (E_1) (E_2), (E_5) et (E_7)

Vocabulaire :

★ b(x) est le **second membre** de l'équation.

★ L'équation homogène associée à (E) est $\boxed{(H) : y' + a(x)y = 0}$

★ f est **solution** de (E) sur I ssi $\begin{cases} \text{f est dérivable sur I} \\ \forall x \in I,\ f'(x) + a(x)f(x) = b(x) \end{cases}$

1.2 Structure de l'ensemble des solutions de (E)

Proposition 7.1: Les solutions de (E) s'obtiennent en faisant la somme des solutions de l'équation homogène associée (H) et d'une solution particulière.
Ainsi si f est une solution de (E), S = { f + h, h solution de (H) }

Conséquence : Pour résoudre (E) il suffit de résoudre (H) et de déterminer une solution particulière de (E).

1.3 Résolution de l'équation homogène

Théorème 7.1: Soit a une fonction continue de I dans $\mathbb{K}$.
Les solutions de $y' + a(x)y = 0$ (H) sont les fonctions définies sur I par $\forall x \in I$, $f_\lambda(x) = \lambda e^{-A(x)}$ où A est une primitive de a sur I et λ décrit $\mathbb{K}$.

✍ Application: Résoudre dans $\mathbb{R}$: $(x^2+1)y' + xy = 0$ *Annexe 1*

Remarques:
★ A est une primitive choisie arbitrairement donc elle peut s'écrire:

$A(x) = \int_{x_0}^{x} a(t)dt$ où x_0 est un réel quelconque de I.

★ La fonction nulle est toujours solution de l'équation homogène.
★ Si f est une solution de (H) différente de la fonction nulle alors f ne s'annule pas sur I.
★ On appelle solution générale de (H) la fonction $f_\lambda : x \to \lambda e^{-A(x)}$, $\lambda \in \mathbb{K}$.

Cas particulier où la fonction a est constante sur I

Corollaire 7.2 : Soit a fixé dans $\mathbb{K}$. Les solutions de l'équation différentielle $y' = ay$ sont toutes les fonctions $f_\lambda : x \mapsto \lambda e^{ax}$ où λ décrit $\mathbb{K}$.

Preuve : $y' = ay \Leftrightarrow y' - ay = 0$ et une primitive de $x \mapsto -a$ est $x \mapsto -ax$.

Exemple: Les solutions de l'équation différentielle $y' = y$ sont les fonctions $f_\lambda : x \mapsto \lambda e^{x}$ où λ décrit $\mathbb{K}$.

1.4 Résolution de l'équation avec second membre

Par application de la proposition 7.1, le problème se ramène à trouver une solution particulière de (E).

★ Solution évidente : Il faut toujours regarder si on peut trouver facilement une solution particulière, en particulier une solution constante.

✍ Exercice: Résoudre dans $\mathbb{R}$: $(x^2+1)y' + xy = 2x$

★ Recherche directe d'une solution lorsque **a est constante sur I**.

① $b(x) = P(x)e^{mx}$ où P est un polynôme et m un complexe, on cherche une solution particulière de la même forme.

✍ Exercice: Résoudre dans $\mathbb{R}$: $y' - 2y = (t^2 + 1)e^{t}$

② Si a est une constante réelle et $b(x) = \mathrm{Re}(P(x)e^{mx})$ ou $b(x) = \mathrm{Im}(P(x)e^{mx})$.
On détermine une solution particulière à valeurs complexes y_0 de $y' + a(x)y = P(x)e^{mx}$ à l'aide du point précédent et on prend $\mathrm{Re}(y_0)$ ou $\mathrm{Im}(y_0)$.

✍ Exercice: Résoudre dans $\mathbb{R}$: $y' - y = x\cos x$

Remarque : Si $b(x) = \alpha\cos(\omega x)$ ou $b(x) = \beta\sin(\omega x)$, on pourra directement chercher une solution particulière de la forme $x \mapsto \lambda\cos(\omega x) + \mu\sin(\omega x)$ *cf équation suivante*

★ Principe de superposition des solutions

Proposition 7.3: Si f_1 est solution de $y' + a(x)y = b_1(x)$ sur I et f_2 solution de $y' + a(x)y = b_2(x)$ sur I alors $f_0 = f_1 + f_2$ est solution de $y' + a(x)y = b_1(x) + b_2(x)$ sur I.

✍ Exercice: Résoudre dans ℝ : $y' + y = 2\sin^2 x$

★ Méthode de variation de la constante:

La solution générale de l'équation homogène étant $x \mapsto \lambda e^{-A(x)}$ on va chercher une solution de la forme $f : x \mapsto \varphi(x)e^{-A(x)}$ *la constante devient une fonction.*

f est solution de (E) $\Leftrightarrow \forall x \in I,\ \varphi'(x)e^{-A(x)} - a(x)\varphi(x)e^{-A(x)} + a(x)\varphi(x)e^{-A(x)} = b(x)$
$\Leftrightarrow \forall x \in I,\ \varphi'(x) = b(x)e^{A(x)}$

φ est donc une primitive de $x \mapsto b(x)e^{A(x)}$, sur I que l'on choisit arbitrairement.

On peut écrire $\varphi(x) = \int_{x_0}^{x} b(t)e^{A(t)}dt$ avec x_0 arbitrairement choisi dans I

⚠ Attention: Cette méthode est générale mais elle peut mener à une recherche de primitive difficile à expliciter, ce n'est donc pas la méthode à privilégier à priori. Retenir l'égalité ci-dessous n'est pas utile, il suffit de remplacer y dans l'équation pour aboutir à $\varphi'(x) = \ldots\ldots$

✍ Exercice : Résoudre dans ℝ : $y' + 2ty = e^{t-t^2}$

Remarque: Notons que nous avons trouvé une expression générale des solutions de (E) :

$f_\lambda : x \mapsto \lambda e^{-A(x)} + B(x)e^{-A(x)}$ où B est une primitive de de $x \mapsto b(x)e^{A(x)}$ sur I et k une constante quelconque de $\mathbb{K}$.

Ou encore $\boxed{f_\lambda(x) = \left(\lambda + \int_{x_0}^{x} b(t)e^{A(t)}dt\right)e^{-A(x)},\ \lambda \in \mathbb{K} \text{ et } x_0 \text{ arbitrairement fixé dans I}}$

1.4 Problème de Cauchy du 1er ordre

Proposition 7.4: Soit a et b deux fonctions continues de I dans $\mathbb{K}$ et $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{K}$,
$y(x_0) = y_0$ est une condition initiale et
Le problème de Cauchy $\begin{cases} y' + a(x)y = b(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$, admet une unique solution sur I

✍ Exercice: Résoudre dans ℝ, $(x^2 + 1)y' + xy = 2x$ et $y(0) = -1$.

---

2. Equation différentielle linaire du second ordre à coefficients constants

On s'intéresse dans ce paragraphe aux équations différentielles du type (E_4) : $2y'' + 3y' + y = 0$

2.1 Présentation et structure de l'ensemble des solutions :

Def : On appelle équation différentielle linéaire du 2nd ordre à coefficients constants, toute équation pouvant s'écrire sous la forme: $\boxed{ay'' + by' + cy = u(x)\ (E)}$,
où a, b et c sont des constantes, $a \neq 0$ et u est une fonction continue de I dans $\mathbb{K}$.

Vocabulaire :
★ u(x) est appelé **second membre** de l'équation.
★ L'équation homogène associée à (E) est $\boxed{(H) : ay'' + by' + cy = 0}$
★ f est **solution** de (E) sur I ssi f est deux fois dérivable sur I et
$\forall x \in I,\ af''(x) + bf'(x) + cf(x) = u(x)$.

Proposition 7.5: La solution générale de (E) s'obtient en faisant la somme de la solution générale de (H) et d'une solution particulière de (E)

Même preuve que pour le 1er ordre

2.2 Solutions à valeurs complexes de l'équation homogène

Théorème 7.2: Résolution de ay" + by' + cy = 0 dans le cas complexes
Soit (H): $ay'' + by' + cy = 0$, avec $a, b, c \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$, on appelle équation caractéristique de (H) l'équation du second degré $ar^2 + br + c = 0$ et on note $\Delta = b^2 - 4ac$, $\Delta \in \mathbb{C}$.
- Si $\Delta = 0$. alors l'équation caractéristique admet une racine double r_0 et les solutions de (H) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions : $x \mapsto (\lambda x + \mu)e^{r_0 x}$ où (λ, μ) décrit $\mathbb{C}^2$.
- Si $\Delta \neq 0$ alors l'équation caractéristique admet deux racines complexes distinctes r_1 et r_2 et les solutions de (H) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions : $x \mapsto \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x}$, où (λ, μ) décrit $\mathbb{C}^2$.

✍ Exercice: Déterminer les solutions à valeurs complexes de $y'' - (1 + 2i)y' + 2iy = 0$

2.3 Solutions à valeurs réelles de l'équation homogène :

Lorsque a, b, c sont réels et le second membre est à valeurs réelles, on se contentera de déterminer les solutions de (E) à valeurs réelles.

Théorème 7.3: Résolution de ay" + by' + cy = 0 dans le cas réel
Soit (H): $ay'' + by' + cy = 0$, avec $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.
On appelle équation caractéristique de (H) l'équation du second degré $ar^2 + br + c = 0$ et on note $\Delta = b^2 - 4ac$, on a $\Delta \in \mathbb{R}$.
① Si $\Delta > 0$ alors l'équation caractéristique admet deux racines réelles r_1 et r_2 et les solutions réelles de (H) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions : $x \mapsto \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x}$ où (λ, μ) décrit $\mathbb{R}^2$.
② Si $\Delta = 0$. alors l'équation caractéristique admet une racine double r_0 et les solutions réelles de (H) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions : $x \mapsto (\lambda x + \mu)e^{r_0 x}$ où (λ, μ) décrit $\mathbb{R}^2$.
③ Si $\Delta < 0$ alors l'équation caractéristique admet deux solutions complexes conjuguées $\alpha + i\beta$ et $\alpha - i\beta$, et les solutions de réelles (H) sur sont les fonctions : $x \mapsto e^{\alpha x}\left(\lambda \cos(\beta x) + \mu \sin(\beta x)\right)$
où (λ, μ) décrit $\mathbb{R}^2$.

✍ Exercice: Déterminer les solutions à valeurs réelles de $y'' + y' + y = 0$

✍ Dans la pratique : On rencontre en physique les équations suivantes :
① $y'' - \omega^2 y = 0$ les solutions sont $t \mapsto \lambda \mathrm{ch}(\omega t) + \mu \mathrm{sh}(\omega t)$ où (λ, μ) décrit $\mathbb{R}^2$

② $y'' + \omega^2 y = 0$ les solutions sont $t \mapsto \lambda \cos(\omega t) + \mu \sin(\omega t)$ où (λ, μ) décrit $\mathbb{R}^2$

2.4 Equation avec second membre

Le problème se ramène à trouver une solution particulière de (E).

★ Si u est constante : on cherche une solution constante.

★ Si $u(x) = P(x)e^{mx}$ où P est un polynôme et m un complexe, on cherche une solution particulière de la de la forme $x \mapsto Q(x)e^{mx}$ où Q est aussi un polynôme.

✍ Exercice : Résoudre $y'' - 3y' + 2y = x^2 e^x$

★ Si les coefficients sont réels et $u(x) = \mathrm{Re}(P(x)e^{mx})$ ou $u(x) = \mathrm{Im}(P(x)e^{mx})$.
On détermine une solution particulière y_0 de $ay'' + by' + cy = P(x)e^{mx}$ en appliquant la méthode précédente et on prend $\mathrm{Re}(y_0)$ ou $\mathrm{Im}(y_0)$

★ Principe de superposition des solutions

Proposition 7.6: Si f_1 est solution de $ay'' + by' + cy = u_1(x)$ sur I et f_2 solution de $ay'' + by' + cy = u_2(x)$ sur I alors $f_0 = f_1 + f_2$ est solution de $ay'' + by' + cy = u_1(x) + u_2(x)$ sur I.

✍ Exercice : Résoudre $y'' + y' + y = x\cos(x) + 1$

2.5 Problème de Cauchy du 2[nd] ordre

Proposition 7.7 (Admis): Soit $x_0 \in I$, y_0 et y_1 fixés dans $\mathbb{K}$ et P un polynôme. Le problème de

Cauchy: $\begin{cases} ay'' + by' + cy = P(x)e^{mx} \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \end{cases}$ où a, b, c, $m \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$ admet une unique solution.

Dans la pratique: On écrit la solution générale de l'équation et on détermine les constantes grâce aux conditions initiales.

✍ Exercice : Résoudre $y'' - 2y' + y = 3$, $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$

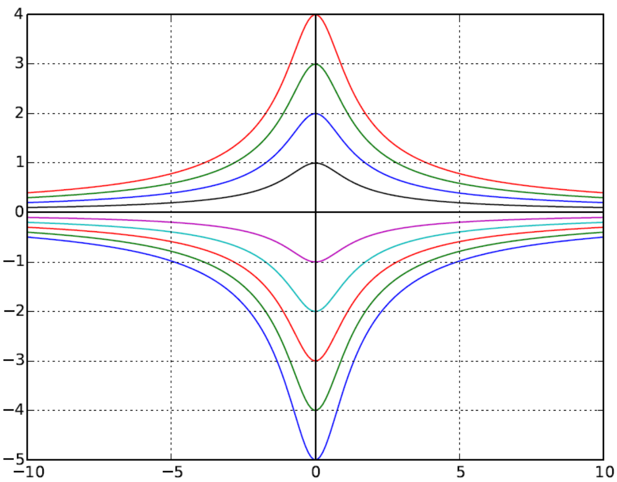
Annexe 1 : Quelques courbes intégrales de $(x^2+1)y' + xy = 0$ avec Python

• Script pour tracer une famille de courbes:

```
def f(t,k):
       return k/sqrt(t**2+1) # on définit fk
```

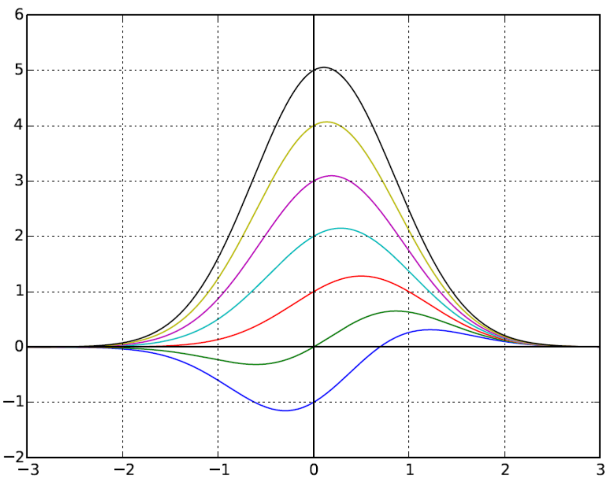
```
import numpy as np #on charge la bibliothèque numpy et on la nomme np
import matplotlib.pyplot as pl #on charge la bibliothèque graphique et on la nomme
pl
x=np.linspace(-10,10,200)#on crée une liste de valeurs pour x

for k in range(-5,5):
       y=f(x,k) #on calcule 200 valeurs de fk(x), on obtient ainsi 10 listes.
       pl.plot(x,y) #pour chaque valeur entière de k de -5 à 5, on trace le
                      graphe de fk

pl.grid() #on fait une grille, c'est plus joli
pl.axhline(color='black') #trace l'axe des abscisses
pl.axvline(color='black') #trace l'axe des ordonnées
pl.savefig('courbe-intégrale-1.pdf') #on sauve le graphique au format pdf
pl.show() #on demande à Python de nous montrer le résultat
```

• On admire le résultat



Annexe 2 : Quelques courbes intégrales de $y' + 2ty = e^{t-t^2}$ avec Python

On modifie le script (à vous...) et on obtient :



Annexe 3 : Preuve du théorème 7.2

On cherche ici les solutions de (H) à valeurs dans $\mathbb{C}$.

• On commence par chercher les solutions de la forme $g : x \mapsto e^{rx}$ où r est une constante complexe. On remplace : g solution de (H) $\Leftrightarrow ... \Leftrightarrow ar^2 + br + c = 0$ (EC)
Cette équation du 2nd degré est <u>l'équation caractéristique de (H)</u>.

• Soit r_1 et r_2 les solutions dans $\mathbb{C}$, éventuellement confondues de (EC), les fonctions $x \mapsto e^{r_1 x}$ et $x \mapsto e^{r_2 x}$ sont donc solutions de (H) ainsi que $x \mapsto ke^{r_1 x}$ et $x \mapsto ke^{r_2 x}$ où $k \in \mathbb{C}$.

• On effectue le changement d'inconnue $z = ye^{-r_1 x}$.

on a donc $\forall x \in \mathbb{R},\ z(x) = y(x)e^{-r_1 x} \Leftrightarrow y(x) = z(x)e^{r_1 x}$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $y'(x) = z'(x)\, e^{r_1 x} + r_1 z(x)\, e^{r_1 x}$

et $y''(x) = z''(x)\, e^{r_1 x} + r_1 z'(x)\, e^{r_1 x} + r_1 z'(x)\, e^{r_1 x} + r_1^2 z(x)\, e^{r_1 x}$.

On remplace dans (H) :
(H) $\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}$, $az''(x) + (2ar_1 + b)z'(x) + (ar_1^2 + br_1 + c)z(x) = 0$
$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}$, $az''(x) + (2ar_1 + b)z'(x) = 0$
$\Leftrightarrow$ z' est solution de $ah' + (2ar_1 + b)h = 0$ (♣) en posant $h = z'$

on s'est ainsi ramené au 1er ordre

• Notons Δ le discriminant de (EC)
<u>1er cas : Si $\Delta = 0$</u> alors (EC) a $r_1 = -b/2a$ comme unique solution et donc en injectant dans (♣)
(H) $\Leftrightarrow$ z' solution de $f' = 0 \Leftrightarrow \exists (A,B) \in \mathbb{C}^2, \forall x \in \mathbb{R}, z(x) = Ax + B$

On en déduit que les solutions de (H) sont les fonctions $f_{A,B} : x \mapsto (Ax + B)e^{r_1 x}$ où (A,B) décrit $\mathbb{C}^2$.

<u>2nd cas : Si $\Delta \neq 0$</u> alors (EC) a deux racines distinctes r_1 et r_2 de somme $S = -b/a$ et donc en injectant dans (♣)
(H) $\Leftrightarrow$ z' solution de $f' = -(2r_1 + b/a)f \Leftrightarrow$ z' solution de $f' = (r_2 - r_1)f$
$\Leftrightarrow \exists (A, B) \in \mathbb{C}^2, \forall x \in \mathbb{R}, z(x) = Ae^{(r_1 + r_1)x} + B$.

On en déduit que les solutions de (H) sont les fonctions $f_{A,B} : x \mapsto Ae^{r_2 x} + Be^{r_1 x}$ où (A,B) décrit $\mathbb{C}^2$.

On a établi le théorème de résolution de l'équation homogène dans le cas complexe.

Annexe 4: Preuve du théorème 7.3

Lemme: Soit a, b, c réels, $a \neq 0$ et u une fonction continue sur I à valeurs réelles.
Les solutions à valeurs réelles de (E) : $ay'' + by' + cy = 0$ sont les parties réelles des solutions de ($\mathcal{E}$) : $ay'' + by' + cy = 0$ à valeurs dans $\mathbb{C}$.

Démo:

• Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une solution de ($\mathcal{E}$) : $ay'' + by' + cy = 0$. On a $f = \mathrm{Re}(f) + i\mathrm{Im}(f)$
f est deux fois dérivable et $f' = (\mathrm{Re}(f))' + i(\mathrm{Im}(f))'$ et $f'' = (\mathrm{Re}(f))'' + i(\mathrm{Im}(f))''$
f étant solution de (E) on a :
$a[(\mathrm{Re}(f))'' + i(\mathrm{Im}(f))''] + b[(\mathrm{Re}(f))' + i(\mathrm{Im}(f))'] + c[\mathrm{Re}(f) + i\mathrm{Im}(f)] = 0$.

En identifiant les parties réelles et imaginaires de chaque membre, on obtient :
$a(\mathrm{Re}(f))'' + b(\mathrm{Re}(f))' + c\mathrm{Re}(f) = 0$.

Par suite, Re(f) est bien solution de $ay'' + by' + cy = 0$
Bilan : Les parties réelles des solutions de ($\mathcal{E}$) font parties des solutions à valeurs réelles de (E)

• Réciproquement, si f est une fonction solution à valeur réelle de (E), alors f est une solution à valeurs complexes de $ay'' + by' + cy = 0$.

Or f = Ref et donc f est bien la partie réelle d'une solution de ay''+by'+cy = 0.
Bilan : Les solutions à valeurs réelles de (E) font partie des parties réelles des solutions de ($\mathcal{E}$).

CCl : Les parties réelles des solutions de ($\mathcal{E}$) sont exactement les solutions à valeurs réelles de (E)

On en déduit que les solutions de (H) à valeurs réelles sont les parties réelles des solutions de (H) à valeurs complexes.

Considérons l'équation caractéristique et $\Delta = b^2-4ac$.
Ici, $\Delta\in\mathbb{R}$ et on peut considérer 3 cas:

<u>1er cas: $\Delta > 0$</u>: l'équation caractéristique à deux racines réelles r_1 et r_2 et les solutions de (H) à valeurs complexes sont $f: x \mapsto \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x}$ avec α et $\beta\in\mathbb{C}$.

On a $\boxed{\mathrm{Re}(f): x \mapsto \mathrm{Re}(\lambda)e^{r_1 x} + \mathrm{Re}(\mu)e^{r_2 x} = Ae^{r_1 x} + Be^{r_2 x}}$ avec A et B réels

<u>2ème cas: $\Delta = 0$</u>: l'équation caractéristique à une racine double réelle x_0 et les solutions sont $\boxed{\mathrm{Re}(f): x \mapsto \mathrm{Re}\left[(\lambda x+\mu)e^{r_0 x}\right] = (Ax + B)e^{r_0 x}}$ avec A et B réel

<u>3ème cas : $\Delta < 0$</u>: l'équation caractéristique a deux racines complexes conjuguées $r_1 = \alpha + i\beta$ et $r_2 = \alpha - i\beta$ et les solutions de (H) à valeurs complexes sont définies sur $\mathbb{R}$ par
$\forall x\in\mathbb{R}$, $f(x) = \lambda e^{(\alpha+i\beta)x} + \mu e^{(\alpha-i\beta)x}$ avec $\lambda = x_\lambda + iy_\lambda$ et $\mu = x_\mu + iy_\mu \in\mathbb{C}$.

$\forall x\in\mathbb{R}$, Re(f)(x) =....

=..... *Après calculs*

$= e^{\alpha x}[(x_\lambda+x_\mu)\cos(\beta x) + (y_\mu-y_\lambda)\sin(\beta x)]$

C'est-à-dire $\boxed{\mathrm{Re}(f): x \mapsto e^{\alpha x}[A\cos(\beta x)+B\sin(\beta x)]}$ avec A et B $\in\mathbb{R}$.

On a établi le théorème de résolution de l'équation homogène dans le cas réel.