

Chapitre 9-Ensembles et applications - résumé

Il est indispensable de mémoriser durablement le vocabulaire (en gras) défini dans ce chapitre.

1. Ensembles - Rappels et compléments

Se reporter au chapitre 0

Rappel : Un ensemble est une collection d'objets.

On peut le décrire des façons suivantes :

- En le nommant si une notation lui a été attribuée: $\mathbb{U}_n$ désigne l'ensemble des racines nièmes de 1
- En extension c'est à dire en listant ses éléments : $\mathbb{U}_n = \{ e^{i2k\pi/n}, k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \}$
- En compréhension c'est à dire en caractérisant ses éléments par une propriété $\mathcal{P}$

$$\mathbb{U}_n = \{ z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1 \}$$

Rappel: Soit E et A deux ensembles. A est une partie, ou un sous-ensemble, de E lorsque tout élément de A est dans E. On note $A \subset E$ et on lit "A est inclus dans E"

⚠ Attention à ne pas confondre :

$\in$ est réservé aux éléments

$\subset$ est réservé aux parties.

Déf: On note $\mathcal{P}(E)$ l'**ensemble des parties** de l'ensemble E.

Exemple: Si $E = \{1, 3, 2\}$ alors $\mathcal{P}(E) = \{ \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{2,3\}, \{1,3\}, \{1, 2, 3\} \}$

$\mathcal{P}(E)$ contient toujours $\emptyset$ et E.

⚠ Attention: $\mathcal{P}(E)$ est un ensemble dont les éléments sont des ensembles.

Def Soit A et B dans $\mathcal{P}(E)$.

L'**intersection** de A et de B est $A \cap B = \{x \in E \mid x \in A \text{ et } x \in B\}$

La **réunion** de A et de B est $A \cup B = \{x \in E \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$.

Le **complémentaire** de A dans E est $\bar{A} = \{x \in E, x \notin A\}$

★ **Vocabulaire:** Lorsque $A \cap B = \emptyset$, on dit que A et B sont **disjoints**.

★ **Remarques :**

- On a les inclusions évidentes: $A \cap B \subset A \subset A \cup B$ $A \cap B \subset B \subset A \cup B$
- Il est clair que $A \cup A = A \cap A = A$, $A \cap E = A$, $A \cap \emptyset = \emptyset$, $A \cup E = E$, $A \cup \emptyset = A$

Proposition 9.1: $\forall A, B, C \in \mathcal{P}(E)$.

① $A \cap B = B \cap A$ et $A \cup B = B \cup A$

commutativité

② $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ et $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

associativité

③ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ et $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

distributivité

④ $\overline{\bar{A}} = A$

⑤ $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$ et $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

Lois de Morgan

2. Applications:

2.1 Généralités:

Déf: Soit E et F deux ensembles. Une **application** de E dans F est un procédé qui à tout élément de E associe un unique élément de F.

On note $f: \begin{cases} E \rightarrow F \\ x \mapsto f(x) \end{cases}$

★ Vocabulaire et notation:

E est l'**ensemble de définition**.

F est l'**ensemble d'arrivée**.

$f(x)$ est l'**image** de x par f , $f(x)$ est un élément de F et donc ne désigne pas l'application.

Si $y = f(x)$ alors x est un **antécédent** de y par f .

L'ensemble des applications de E dans F est noté $\mathcal{F}(E, F)$ ou F^E .

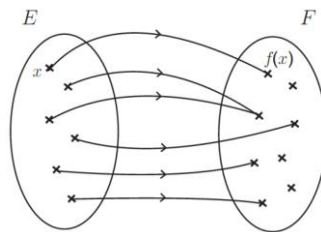
Exemples:

$$\bullet f : \begin{cases} \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \sqrt{x} \end{cases}$$

$$\bullet g : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \\ \theta \mapsto e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta \end{cases}$$

$$\bullet p : \begin{cases} \mathcal{P}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (\vec{u}, \vec{v}) \mapsto \vec{u} \cdot \vec{v} \end{cases}$$

- On peut utiliser un diagramme sagittal pour représenter f :



★ Dans la pratique: Pour montrer que deux applications f et g sont égales il faut montrer qu'elles ont même ensemble de définition E , même ensemble d'arrivée F et que $\forall x \in E, f(x) = g(x)$

★ Cas particuliers à connaître:

- L'**identité de E** noté Id_E est l'application $\text{Id}_E : \begin{cases} E \rightarrow E \\ x \mapsto x \end{cases}$

- Soit A une partie de E , on appelle **fonction indicatrice de A** l'application de E dans $\{0, 1\}$ définie par $\forall x \in E, \mathbb{I}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$

Def: Soit $f: E \rightarrow F$ une application, on appelle **graphe** de f l'ensemble :

$$G_f = \{(x, y) \in E \times F \mid y = f(x)\}.$$

Exemple : La fonction définie sur $\llbracket 1, 3 \rrbracket$ par $f(k) = k^2$ a pour graphe : $G = \{(1, 1), (2, 4), (3, 9)\}$

2.2 Famille d'éléments d'un ensemble, partition

Def : Soit I et E deux ensembles, une **famille d'éléments de E indexée par I** est une application

définie par $\begin{cases} I \rightarrow E \\ i \mapsto e_i \end{cases}$, on note cette famille $(e_i)_{i \in I}$

Exemples.

Si $I = \llbracket 1, n \rrbracket$, et $\forall z_i \in \llbracket 1, n \rrbracket, z_i \in \mathbb{C}$ alors $(z_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une famille de n nombres complexes

Si $I = \mathbb{Z}$, $(]k\pi, (k+1)\pi[)_{k \in \mathbb{Z}}$ est une famille d'intervalles de $\mathbb{R}$

★ **Notation :** Soit I un ensemble et $(A_i)_{i \in I}$ une famille de $\mathcal{P}(E)$ indexée par les éléments de I .

On définit $\bigcup_{i \in I} A_i$ et $\bigcap_{i \in I} A_i$ par :

$$x \in \bigcup_{i \in I} A_i \text{ ssi } \exists i \in I, x \in A_i \quad \text{et} \quad x \in \bigcap_{i \in I} A_i \text{ ssi } \forall i \in I, x \in A_i.$$

Exemple : l'ensemble de définition de la fonction tangente est $D = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left] -\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi \right[$

Def : Soit E et I deux ensembles.

On considère A une partie de E et $(A_i)_{i \in I}$ une famille de $\mathcal{P}(E)$.

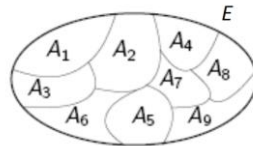
① On dit que la famille $(A_i)_{i \in I}$ est un **recouvrement disjoint** de A si on a

$$\forall (i, j) \in I^2, i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset \text{ et } A \subset \bigcup_{i \in I} A_i$$

② On dit que la famille $(A_i)_{i \in I}$ est une **partition** de E lorsque

$\forall i \in I, A_i \neq \emptyset$, et $(A_i)_{i \in I}$ est un recouvrement de E c'est-à-dire

$$\begin{cases} \forall i \in I, A_i \neq \emptyset \\ \forall (i, j) \in I^2, (i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset) \\ E = \bigcup_{i \in I} A_i \end{cases}$$



Exemples :

- La famille des groupes de colles est une partition de la PCSI2
- La famille formée des entiers pairs et des entiers impairs est une partition de $\mathbb{Z}$.

Exercice : Donner toutes les partitions de $E = \{1, 2, 3\}$

2.3 Restriction et prolongement:

Def: Soit $f: E \rightarrow F$ et A une partie de E .

- La **restriction** de f à A est l'application $f|_A : \begin{cases} A \rightarrow F \\ x \mapsto f(x) \end{cases}$

- On dit que g est un **prolongement** de f lorsque f est une restriction de g .

Exemples:

- $f : \begin{cases} [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 \end{cases}$ est une restriction de la fonction racine carrée.

- $g : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} \sqrt{x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases} \end{cases}$ est un prolongement de la fonction racine carrée

Remarque et vocabulaire : On peut également modifier l'ensemble d'arrivée.

Soit $f: E \rightarrow F$ et B une partie de F tel que $\forall x \in E, f(x) \in B$, on peut définir l'application

$$h : \begin{cases} E \rightarrow B \\ x \mapsto f(x) \end{cases}. \text{ Dans ce cas on dit que } h \text{ est induite par } f.$$

Exemple : La fonction carrée induit l'application $h : \begin{cases} \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+ \\ x \mapsto x^2 \end{cases}$

2.4 Image directe et image réciproque:

Def: Soit $f: E \rightarrow F$, A une partie de E et B une partie de F .

- L'**image directe** de A par f est la partie de F constituée des images des éléments de A par f .
On note $f(A) = \{f(x), x \in A\} = \{y \in F \mid \exists x \in A, y = f(x)\}$

• L'**image réciproque** de B par f est la partie de E constituée par les antécédents des éléments de B par f.

On note $f^{-1}(B) = \{x \in E \mid f(x) \in B\}$

⚠ Attention : On écrit $f^{-1}(B)$ même si f n'est pas bijective.

★ Dans la pratique : On utilisera les caractérisations suivantes :

$$y \in f(A) \Leftrightarrow \exists x \in A, y = f(x).$$

$$x \in f^{-1}(B) \Leftrightarrow f(x) \in B.$$

Exemples:

• Soit $f : \begin{cases}]-\pi; \pi] \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \sin x \end{cases}$

$$f(-\pi, \pi] = [-1, 1] \quad f([0, \pi/2]) = [0, 1] \quad f^{-1}([0, 1/2]) = [0, \pi/6] \cup [5\pi/6, \pi] \quad f^{-1}([2, 3]) = \emptyset$$

Remarques : Soit $f : E \rightarrow F$

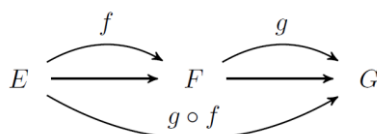
$f(\emptyset) = \emptyset$ et $f(E) \subset F$ mais on n'a pas nécessairement $f(E) = F$!!

$f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ et $f^{-1}(F) = E$

2.5 Composition d'applications:

Def: Soit E, F et G trois ensemble et $f: E \rightarrow F$ et $g: F \rightarrow G$ deux applications. La **composée** de f par g

est l'application $\text{gof} : \begin{cases} E \rightarrow G \\ x \mapsto g(f(x)) \end{cases}$ ou encore $\text{gof} : x \in E \xrightarrow{f} f(x) \in F \xrightarrow{g} g(f(x)) \in G$



Proposition 9.2 : Propriétés de la composition: Soit $f: E \rightarrow F$, $g: F \rightarrow G$ et $h: G \rightarrow H$

- ① $\circ$ n'est pas commutative
- ② $\text{Id}_F \circ f = f$ et $f \circ \text{Id}_E = f$
- ③ $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$ associativité

3. Injection, surjection et bijection

3.1 Application injective

Def: Soit $f: E \rightarrow F$, f est **injective**, ou est une **injection**, lorsque tout élément de F admet au plus un antécédent par f.

Dans la pratique : On utilisera les caractérisations suivantes : Soit $f: E \rightarrow$

$$f \text{ est injective} \Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in E, (f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2)$$

$$f \text{ est injective} \Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in E, (x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2))$$

$$f \text{ est injective} \Leftrightarrow \forall y \in F, \text{ l'équation } f(x) = y \text{ admet au plus une solution dans } E.$$

Exemple et contre-exemple:

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \sqrt{x} \end{cases} \text{ est injective} \quad g : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+ \\ x \mapsto x^2 \end{cases} \text{ et } h : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \\ \theta \mapsto e^{i\theta} \end{cases}, \text{ ne sont pas injectives}$$

Proposition 9.3: Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, si f est strictement monotone sur I alors f est injective.

★ Remarque : Il n'est pas nécessaire que la fonction soit continue sur I.

Proposition 9.4:

- ① La composée de deux applications injectives est injective.
- ② Si la composée $g \circ f$ est injective alors f est injective.

3.2 Application surjective

Def: Soit $f: E \rightarrow F$, f est **surjective**, ou est une **surjection** de E sur F (ou dans F), lorsque tout élément de F admet au moins un antécédent par f .

★ Dans la pratique: On utilisera les caractérisations suivantes: Soit $f: E \rightarrow F$

f est surjective $\Leftrightarrow \forall y \in F, \exists x \in E, f(x) = y$

f est surjective $\Leftrightarrow \forall y \in F$, l'équation $f(x) = y$ admet au moins une solution dans E

f est surjective $\Leftrightarrow f(E) = F$

Exemple et contre-exemple:

• $f: \begin{cases} \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \sqrt{x} \end{cases}$ n'est pas surjective (mais est injective)

• $g: \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+ \\ x \mapsto x^2 \end{cases}$ est surjective (mais pas injective)

• $h: \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \\ \theta \mapsto e^{i\theta} \end{cases}$, n'est ni surjective (ni injective)

★ Remarque : A partir d'une application $f: E \rightarrow F$, on peut toujours induire une surjection en

considérant $g: \begin{cases} E \rightarrow f(E) \\ x \mapsto f(x) \end{cases}$. Par exemple $\varphi: \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{U} \\ \theta \mapsto e^{i\theta} \end{cases}$ est surjective.

Proposition 9.5:

- ① La composée de deux applications surjectives est surjective.
- ② Si la composée $g \circ f$ est surjective alors g est surjective.

3.3 Application bijective

Def: Soit $f: E \rightarrow F$, f est **bijective**, ou est une **bijection** de E sur F (ou dans F), lorsque tout élément de F admet un unique antécédent par f .

Dans la pratique: On utilise les caractérisations suivantes: Soit $f: E \rightarrow F$

f est bijective $\Leftrightarrow f$ est injective et surjective.

f est bijective $\Leftrightarrow \forall y \in F, \exists! x \in E, f(x) = y$

f est bijective $\Leftrightarrow \forall y \in F$, l'équation $f(x) = y$ admet une unique solution dans E

Exemples et contre-exemples:

• $f: \begin{cases} \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+ \\ x \mapsto \sqrt{x} \end{cases}$ et $g: \begin{cases} \mathbb{R}_- \rightarrow \mathbb{R}_+ \\ x \mapsto x^2 \end{cases}$ sont bijectives en tant que fonctions de la variable réelle

continues et strictement monotones sur un intervalle (th de la bijection).

• $z = x + iy \mapsto M(x, y)$ est une bijection de $\mathbb{C}$ sur $\mathcal{P}$.

• $\theta \mapsto e^{i\theta}$ est une bijection de $]-\pi; \pi]$ sur $\mathbb{U}$, mais pas de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{U}$ ni de $]-\pi, \pi]$ sur $\mathbb{C}$.

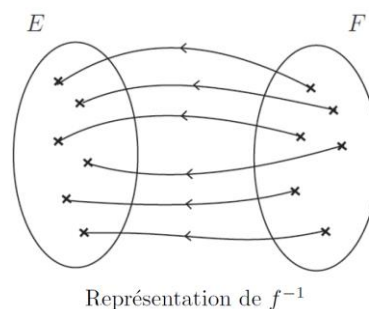
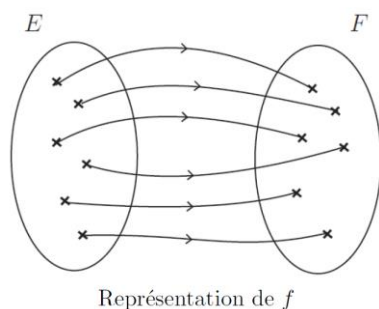
★ Vocabulaire: Une bijection de E dans lui-même est appelée une **permutation**.

Proposition 9.6:

- ① La composée de deux applications bijectives est bijective.
- ② Si la composée $g \circ f$ est bijective alors f est injective et g est surjective.

Def: Soit $f: E \rightarrow F$ une bijection, on peut définir une application de F dans E qui à tout y de F associe son unique antécédent par f . Cette application est la **bijection réciproque** de f notée f^{-1} .

$$f^{-1}: \begin{cases} F \rightarrow E \\ y \mapsto x \text{ tel que } f(x) = y \end{cases}$$

**★ Conséquences:**

- $\forall x \in E, \forall y \in F, y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$.
- $x \mapsto y \mapsto x$ soit $f^{-1} \circ f = \text{Id}_E$ et $y \mapsto x \mapsto y$ soit $f \circ f^{-1} = \text{Id}_F$

★ En pratique: Pour montrer que f est une bijection, on peut montrer que l'équation $f(x) = y$ admet une unique solution pour tout y de F , en exprimant x en fonction de y . Cela donne du même coup l'expression de f^{-1} .

⚠ Attention aux notations !! Soit $f: E \rightarrow F$.

- Si B est une partie de F , $f^{-1}(B)$ existe toujours et est l'image réciproque de B par f , en revanche pour $y \in F$, $f^{-1}(y)$ n'a de sens que si f est bijective.
- Si f est bijective alors $f^{-1}(B)$ est à la fois l'image réciproque de B par f mais aussi l'image directe de B par f^{-1}

Proposition 9.7: Soit $f: E \rightarrow F$.

Si il existe $g: F \rightarrow E$ tel que $f \circ g = \text{Id}_F$ et $g \circ f = \text{Id}_E$ alors f est bijective et $g = f^{-1}$.

★ Conséquences: Soit $f: E \rightarrow E$. On dit que f est **involutive**, ou est une **involution**, lorsque $f \circ f = \text{Id}_E$. D'après le théorème précédent, une involution est bijective et $f^{-1} = f$.

Par exemple :

- La fonction inverse
- les symétries du plan,
- la conjugaison dans $\mathbb{C}$.

Proposition 9.8: Si $f: E \rightarrow F$ et $g: F \rightarrow G$ sont deux bijections alors $g \circ f: E \rightarrow G$ est aussi une bijection et sa bijection réciproque est $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.