

Exercices - Chapitre 9-Ensembles, applications, relation d'équivalence

♥ A savoir refaire - ♦ Corrigé

① Ensembles

♥ 9.1 Soit A et B deux parties de E , on note $\mathbb{I}_A$ et $\mathbb{I}_B$ les fonctions indicatrices respectives de A et de B . Déterminer les fonctions indicatrices de : $E, \emptyset, A \cap B, A \cup B, \bar{A}$.

9.2 Soit A et B deux parties de E , on définit la **différence symétrique** de A et de B comme suit:

$$A \Delta B = \{x \in E, x \in A \cup B \text{ et } x \notin A \cap B\}$$

a. Exprimer $A \Delta B$ à l'aide des opérations usuelles sur les parties et la représenter sur un diagramme.

b. Déterminer $\mathbb{I}_{\mathbb{R}^+ \Delta \mathbb{R}^-},]-\infty; 2] \Delta [1; +\infty[, A \Delta E$ et $A \Delta \emptyset$.

c. Montrer que $\forall (A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2, A \Delta B = (A \cap \bar{B}) \cup (B \cap \bar{A})$

d. Déterminer $A \Delta A$ puis résoudre dans $\mathcal{P}(E), A \Delta X = \emptyset$

e. Démontrer que $\mathbb{I}_{A \Delta B} = \mathbb{I}_A + \mathbb{I}_B - 2 \times \mathbb{I}_{A \cap B}$ et en déduire que $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$

♦ 9.3 Discuter et résoudre dans $\mathcal{P}(E)$ les équations suivantes, où A et $B \in \mathcal{P}(E)$.

a. $A \cup X = B$

b. $A \cap X = B$

Il est conseillé d'utiliser des diagrammes pour se représenter la situation.

9.4 Famille de parties

a. Ecrire l'ensemble de définition des fonctions suivantes : $f(x) = \sqrt{\cos x + \frac{1}{2}}$ et $g(x) = \ln(\tan x)$

b. Montrer que $\mathbb{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [-n, n]$ et $\{0\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \left[-\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n+1}\right]$

② Applications

♥ 9.5 f désigne la fonction sinus, déterminer

$$f(\mathbb{R}) \quad f^{-1}(\mathbb{R}) \quad f\left(\left[0; \frac{\pi}{2}\right]\right) \quad f^{-1}(\{1\}) \quad f^{-1}([-1; 2[) \quad f^{-1}(f([0; \pi])) \quad f^{-1}(f([0; \pi/2])) \quad f(f^{-1}(\mathbb{R}_+))$$

♥ 9.6 Soit A et B deux parties de E et $f \in \mathcal{F}(E, F)$.

1. Dans cette question $E = F = \mathbb{R}$ et $f(x) = x^2$, déterminer $f([0, 2])$, $f([-3, 2])$ et $f([-2, 1])$

2. Montrer que :

a. $A \subset B \Rightarrow f(A) \subset f(B)$

b. $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$

c. $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$. A-t-on égalité ?

♥ 9.7 Soit A et B deux parties de F et $f \in \mathcal{F}(E, F)$.

1. Dans cette question $E = F = \mathbb{R}$ et $f(x) = \cos x$,

déterminer $f^{-1}([-4, 0])$, $f^{-1}([-1, -\frac{1}{2}])$ et $f^{-1}([-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}])$.

2. Montrer que :

a. $A \subset B \Rightarrow f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B)$

b. $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$

c. $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$

d. $f^{-1}(\bar{A}) = \overline{f^{-1}(A)}$

♦ 9.8 Soit $f: E \rightarrow F, A \subset E$ et $B \subset F$.

a. Montrer que $f(f^{-1}(B)) \subset B$ et $A \subset f^{-1}(f(A))$

b. Trouver une application f et des parties A et B de $\mathbb{R}$ telles que : $f(f^{-1}(B)) \neq B$ et $f^{-1}(f(A)) \neq A$

On pourra utiliser l'exercice 9.5

c. Montrer que $\forall B \in \mathcal{P}(F), f(f^{-1}(B)) = B$ ssi f est surjective

d. Montrer que $\forall A \in \mathcal{P}(E), f^{-1}(f(A)) = A$ ssi f est injective

9.9 Soit $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ définie par $\forall z \in \mathbb{C}, f(z) = z^2 + z + 1$.

- Déterminer $f(\mathbb{C})$, $f(\mathbb{C}^*)$ et $f(\mathbb{R})$.
- Déterminer $f^{-1}(\mathbb{C})$, $f^{-1}(\mathbb{C}^*)$ et $f^{-1}(\mathbb{R})$.
- f est-elle injective ? Surjective ?

♥ **9.10** Pour les applications suivantes vérifier qu'elles sont bien définies puis dire si elles sont injectives, surjectives, bijectives.

- $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$
- $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (2x + 3y, x + 2y)$
- $u: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, n \mapsto n + 1$
- $v: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, f(n) = n - 1$ si $n \neq 0$ et $f(0) = 0$.
- $\varphi: \mathbb{C} \setminus \{i\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{i\}, \varphi(z) = \frac{iz + i}{z - i}$
- $\Phi: \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \Phi(f) = f'$

9.11 Soit $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, une application injective. Montrer que si $\forall n \in \mathbb{N}, f(n) \leq n$ alors $f = \text{Id}_{\mathbb{N}}$.

9.12 Soit $f: \begin{cases} \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}^* \\ (p, q) \mapsto 2^p (2q + 1) \end{cases}$. Montrer que f est surjective.

9.13 Soit $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ définie par $f(x) = 1 - x$ si $x \in [0, \frac{1}{2}]$ et $f(x) = x - \frac{1}{2}$ si $x \in [\frac{1}{2}, 1]$.

Montrer que f est bijective et préciser f^{-1} .

♦ **9.14** On note $\mathbb{D}$ l'ensemble des nombres complexes de module supérieur à 1.

On considère $f: \begin{cases} \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C} \\ z \mapsto \frac{z^2 + 1}{2z} \end{cases}$.

- Démontrer que f est surjective. Est-elle injective ?
- Déterminer l'image de $\mathbb{U}$ par f .

♦ **9.15** Soit E un ensemble et $f: E \rightarrow E$ une application telle que $f \circ f \circ f = f$.
Montrer que f injective $\Leftrightarrow f$ bijective.

♥ **9.16** Soit $f: E \rightarrow F$ une application. Montrer que: $\forall A, B \in \mathcal{P}(E), f(A \cap B) = f(A) \cap f(B) \Leftrightarrow f$ injective

9.17 Soit $f: E \rightarrow F$ une application.

- Soit Y une partie de F . Montrer que $f(f^{-1}(Y)) = Y \cap f(E)$.
Que se passe-t'il si f est surjective ?
- Soit A une partie de E et B une partie de F . Montrer que : $f(A \cap f^{-1}(B)) = f(A) \cap B$.

♦ **9.18** Soit A et B deux parties fixées d'un ensemble E .

On définit l'application f de $\mathcal{P}(E)$ dans $\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$ par $\forall X \in \mathcal{P}(E), f(X) = (X \cap A, X \cap B)$.

- Prouver que f injective $\Leftrightarrow A \cup B = E$
- Prouver que f est surjective $\Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$

♥-♦ Quizz : Vrai ou faux ?

- Toute fonction strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ est injective.
- Si une application n'est pas injective alors elle est surjective.
- Si une application est bijective alors elle est surjective.
- L'application $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ définie par $\forall z \in \mathbb{C}, f(z) = z^2$ est surjective.
- Si f et g sont deux applications de E dans E telles que $f \circ g = \text{Id}_E$ alors f ou g est bijective.
- La restriction d'une injection est une injection.
- La restriction d'une surjection est une surjection.
- Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, on peut déterminer $f^{-1}([0, 1])$ seulement si f est bijective.
- Si $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une bijection alors f est continue et strictement monotone sur $\mathbb{R}$.