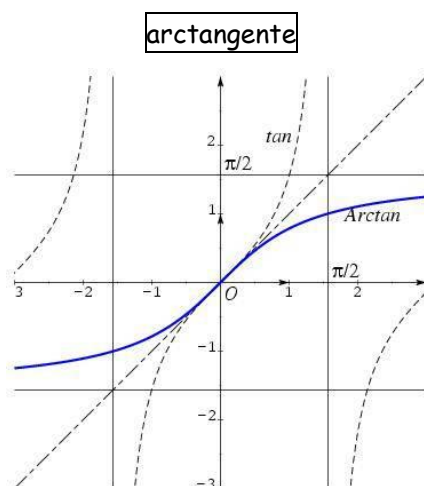
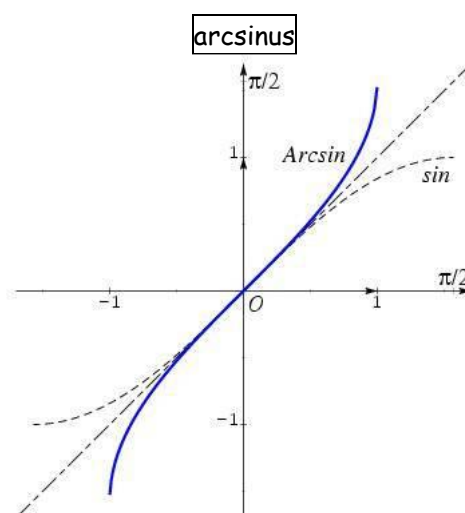
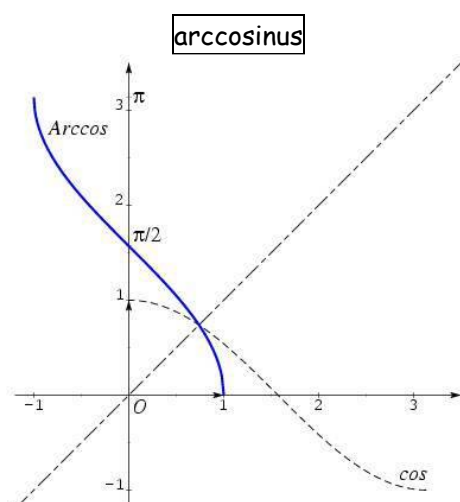


Fonctions usuelles 2

Formules à savoir démontrer:

- $\forall x \in [-1, 1],$
 $\sin(\arccos x) = \cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2}$
- $\forall x \in [-1, 1], \arccos x + \arcsin x = \frac{\pi}{2}$
- $\forall x \in \mathbb{R}^*, \arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } x > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } x < 0 \end{cases}$

Limites à connaître:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin(x)}{x} = 1 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(x)}{x} = 1$$

Nom	Arccosinus	Arcsinus	Arctangente
Notation	Arccos	Arcsin	Arctan
Bijection de $I \rightarrow f(I)$	$[-1, 1] \rightarrow [0; \pi]$	$[-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$	$\mathbb{R} \rightarrow \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$
Parité	$\times$	Impaire	Impaire
Période	$\times$	$\times$	$\times$
D_f	$] -1, 1[$	$] -1, 1[$	$\mathbb{R}$
$f'(x)$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{1}{1+x^2}$
Monotonie	$\searrow$	$\nearrow$	$\nearrow$

Formulaire: Toutes les primitives usuelles

$f(x)$	$F(x)$	Conditions d'application
$x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	valable sur $\mathbb{R}$ si $\alpha \in \mathbb{N}$ valable sur $] -\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$ si $\alpha \in \mathbb{Z}$ - valable sur $]0, +\infty[$ si $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.
$\frac{1}{x-a}$	$\ln x-a $	valable sur $] -\infty, a[$ et $]a, +\infty[$
$\frac{e^{ax}}{a}, a \in \mathbb{C}^*$	$\frac{1}{a} e^{ax}$	valable sur $\mathbb{R}$.
$\ln x$	$x \ln x - x$	valable sur $]0, +\infty[$
$\begin{matrix} \operatorname{ch} x \\ \operatorname{sh} x \\ \operatorname{th} x \\ \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \operatorname{sh} x \\ \operatorname{ch} x \\ \ln(\operatorname{ch} x) \\ \operatorname{th} x \end{matrix}$	$\left. \begin{matrix} \\ \\ \\ \end{matrix} \right\} \text{ valables sur } \mathbb{R}.$
$\begin{matrix} \cos x \\ \sin x \end{matrix}$	$\begin{matrix} \sin x \\ -\cos x \end{matrix}$	valable sur $\mathbb{R}$
$\begin{matrix} \cos(\omega t + \varphi) \\ \sin(\omega t + \varphi) \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{1}{\omega} \sin(\omega t + \varphi) \\ -\frac{1}{\omega} \cos(\omega t + \varphi) \end{matrix}$	valable sur $\mathbb{R}$.
$\begin{matrix} \tan x \\ \cotan x \\ \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x \end{matrix}$	$\begin{matrix} -\ln \cos x \\ \ln \sin x \\ \tan x \end{matrix}$	valable sur I où $\cos x \neq 0$ valable sur I où $\sin x \neq 0$ valable sur I où $\cos x \neq 0$
$\begin{matrix} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} \\ \frac{1}{1+x^2} \\ \frac{1}{a^2+x^2} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \arcsin x \text{ ou } -\arccos x \\ \arcsin \frac{x}{a} \\ \arctan x \\ \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \text{valable sur }]-1; 1[\\ \text{valable sur }]-a; a[, a > 0 \\ \text{valable sur } \mathbb{R} \\ \text{valable sur } \mathbb{R}, a > 0 \end{matrix}$

Soit u une fonction dérivable sur I , sous réserve d'existence

- Une primitive de $u' u^\alpha$ est $\frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ avec α réel

Avec $\alpha = \frac{1}{2}$, on obtient : une primitive de $u' \sqrt{u}$ est $\frac{2}{3} u \sqrt{u}$

- Une primitive de $\frac{u'}{u^\beta} = u' u^{-\beta}$ est $\frac{u^{-\beta+1}}{-\beta+1} = \frac{-1}{\beta-1} \cdot \frac{1}{u^{\beta-1}}$ avec β réel, $\beta \neq 1$

Avec $\beta = \frac{1}{2}$, on obtient : une primitive de $\frac{u'}{\sqrt{u}}$ est $2\sqrt{u}$

- Une primitive de $\frac{u'}{u}$ est $\ln|u|$
- Une primitive de $u' e^u$ est e^u
- Une primitive de $u' \cos(u)$ est $\sin(u)$
- Une primitive de $u' \sin(u)$ est $-\cos(u)$
- Une primitive de $\frac{u'}{1+u^2}$ est $\arctan(u)$
- Une primitive de $\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$ est $\arcsin(u)$

Comment obtenir une primitive de $f : x \mapsto \frac{1}{ax^2+bx+c}$ avec a, b et c réels, $a \neq 0$.

On pose $\Delta = b^2 - 4ac$

1^{er} cas : $\Delta > 0$: On note x_1 et x_2 les racines de $ax^2 + bx + c$.

$\exists (A, B) \in \mathbb{R}^2$, $f(x) = \frac{A}{x-x_1} + \frac{B}{x-x_2}$ et donc une primitive de f est $F(x) = A \ln|x-x_1| + B \ln|x-x_2|$

2^{ème} cas : $\Delta = 0$: On note x_0 la racine double de $ax^2 + bx + c$.

$f(x) = \frac{1}{(x-x_0)^2}$ et donc une primitive de f est $F(x) = \frac{-1}{x-x_0}$

3^{ème} cas : $\Delta < 0$: $ax^2 + bx + c$ n'admet pas de racine réelle, on l'écrit sous forme canonique

$$ax^2 + bx + c = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right] = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{|\Delta|}{4a^2} \right] \text{ car } \Delta = -|\Delta|.$$

On effectue alors le changement de variable $u = x + \frac{b}{2a}$ et on utilise $\int \frac{dt}{u^2 + \alpha^2} = \frac{1}{\alpha} \arctan\left(\frac{u}{\alpha}\right)$

Exemple : Soit $f : x \mapsto \frac{1}{2x^2+2x+1}$. Le dénominateur n'a pas de racines réelles donc f est continue sur $\mathbb{R}$. Soit F une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

$$F(x) = \int^x \frac{dt}{2t^2+2t+1} = \frac{1}{2} \int^x \frac{dt}{t^2+t+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \int^x \frac{dt}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}} \underset{u=t+\frac{1}{2}}{=} \frac{1}{2} \int^{x+\frac{1}{2}} \frac{du}{u^2 + \frac{1}{4}} = \frac{1}{2} [2 \arctan(2u)]^{x+\frac{1}{2}}$$

CCI : $F(x) = \arctan(2x+1)$