Formulaire 2

1. Sous réserve d'existence : $\tan(a+b) = \dfrac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$ et $\tan(2a) = \dfrac{2\tan a}{1-\tan^2 a}$

2. Sous réserve d'existence : $\cos(x) = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ et $\sin(x) = \dfrac{2t}{1+t^2}$ où $t = \tan\dfrac{x}{2}$

3. $\forall a,b \in \mathbb{R}$,

$$\cos a + \cos b = 2\cos\frac{a-b}{2}\cos\frac{a+b}{2}$$

$$\cos a - \cos b = -2\sin\frac{a-b}{2}\sin\frac{a+b}{2}$$

$$\sin a + \sin b = 2\cos\frac{a-b}{2}\sin\frac{a+b}{2}$$

$$\sin a - \sin b = 2\sin\frac{a-b}{2}\cos\frac{a+b}{2}$$

4. $\forall a, b \in \mathbb{R}$

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2}\big(\cos(a-b) + \cos(a+b)\big)$$

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2}\big(\cos(a-b) - \cos(a+b)\big)$$

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2}\big(\sin(a-b) + \sin(a+b)\big)$$

5. Soit α fixé dans $\mathbb{R}$, $f_\alpha : x \mapsto x^\alpha$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et $f_\alpha'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$

6. $\forall x \in \mathbb{R}$, $ch(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ et $sh(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

7. ch est dérivable sur $\mathbb{R}$ et ch' = sh   sh est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sh' = ch

8. $\forall x \in \mathbb{R}$, $ch^2(x) - sh^2(x) = 1$, $ch(x) + sh(x) = e^x$ et $ch(x) - sh(x) = e^{-x}$

9. $\forall \theta \in \mathbb{R}$ $1 + e^{i\theta} = 2\cos\dfrac{\theta}{2}e^{i\frac{\theta}{2}}$ $1 - e^{i\theta} = -2i\sin\dfrac{\theta}{2}e^{i\frac{\theta}{2}}$

10 $\mathbb{U}_n = \{ z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1 \} = \{ e^{i2k\pi/n}, k \in [\![0, n-1]\!] \} = \{ 1, \omega, \omega^2, \dots, \omega^{n-1} \}$ avec $\omega = e^{i2\pi/n}$.

11. $\displaystyle\sum_{z\in\mathbb{U}_n} z = \sum_{k=0}^{n-1} e^{i\frac{2k\pi}{n}} = 0$ et $\displaystyle\prod_{z\in\mathbb{U}_n} z = \prod_{k=0}^{n-1} e^{i\frac{2k\pi}{n}} = (-1)^{n-1}$

12. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

13. $\forall q \in \mathbb{C}$, $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} q^k = q^p \sum_{k=0}^{n-p} q^k = \begin{cases} \dfrac{1-q^{n-p+1}}{1-q} & \text{si } q \neq 1 \\ n-p+1 & \text{si } q = 1 \end{cases}$ *Somme géométrique*

14. $\forall a, b \in \mathbb{C}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a^n - b^n = (a-b)\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k}b^k = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}$ *Bernoulli*

15. Soit $n \in$ et $k \in [\![1, n]\!]$, $\dbinom{n}{k} = \dbinom{n-1}{k} + \dbinom{n-1}{k-1}$ et $\dbinom{n}{k} = \dfrac{n}{k}\dbinom{n-1}{k-1}$

16. Soit a et b$\in\mathbb{C}$, et n$\in\mathbb{N}$, $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$ *Binôme*

a = b = 1 donne $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n$ a = 1 et b = -1 donne $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k = 0$

17. Une primitive de $f : x \mapsto x^\alpha$ est $F : x \mapsto \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ avec α réel, $\alpha \neq 1$

Une primitive de $f : x \mapsto \ln(x)$ est $F : x \mapsto x\ln(x) - x$

Une primitive de $f : x \mapsto e^{\alpha x}$ est $F : x \mapsto \frac{1}{\alpha}e^{\alpha x}$ avec α complexe, $\alpha \neq 0$

Une primitive de $f : x \mapsto \cos(ax+b)$ est $F : x \mapsto \frac{1}{a}\sin(ax+b)$ avec a réel, $a \neq 0$

Une primitive de $f : x \mapsto \sin(ax+b)$ est $F : x \mapsto -\frac{1}{a}\cos(ax+b)$ avec a réel, $a \neq 0$

Une primitive de $f : x \mapsto \tan(x)$ est $F : x \mapsto -\ln|\cos(x)|$

18. Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I

Une primitive de $f'f^\alpha$ est $\frac{f^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ avec α réel, $\alpha \neq 1$

Une primitive de $\frac{f'}{f}$ est $\ln|f|$ si f ne s'annule pas ur I

Une primitive de $f'\exp(f)$ est $\exp(f)$

19. Si f est continue sur un intervalle I alors f admet des primitives sur I.

Une primitive de f sur I s'écrit, $\forall x\in I$,F(x) = $\int^x f(t)dt$

20. Si f et g sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, alors, la formule d'intégration par parties donne

$\forall x\in I$, $\int^x f'(t)g(t)dt \underset{IPP}{=} \left[f(t)g(t)\right]^x - \int^x f(t)g'(t)dt$

21 Soit $I = \int_a^b f(t)dt$. Le changement de variable t = $\varphi(x)$ avec φ de classe $\mathcal{C}^1$ entre a et b donne

$I = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(\varphi(x))\varphi'(x)dx$

22. Soit a une fonction continue sur un intervalle I. Les solutions de y' + a(x)y = 0 sur I sont les fonctions $f_\lambda : x \mapsto \lambda e^{-A(x)}$ avec A(x) = $\int^x a(t)dt$ et $\lambda\in\mathbb{R}$

23. Soit a, b et c trois consantes réelles, et l'EDL: ay'' + by' + cy = 0
On note r_1 et r_2 les racines de l'équation $ar^2 + br + c = 0$.

- Si r_1 et r_2 sont deux réels distincts alors $S = \left\{x \mapsto \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x}, (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2\right\}$
- Si $r_1 = r_2$ alors $S = \left\{x \mapsto (\lambda x + \mu)e^{r_1 x}, (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2\right\}$
- Si r_1 et r_2 sont deux complexes conjugués avec $r_1 = \alpha \pm i\beta$ alors

$S = \left\{x \mapsto e^{\alpha x}\left(\lambda\cos(\beta x) + \mu\sin(\beta x)\right), (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2\right\}$

24. arccos est la biejction réciproque de $\begin{cases} [0,\pi] \to [-1,1] \\ x \mapsto \cos(x) \end{cases}$

arcsin est la bijection réciproque de $\begin{cases} \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] \to [-1,1] \\ x \mapsto \sin(x) \end{cases}$

arctan est la bijection réciproque de $\begin{cases} \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \tan(x) \end{cases}$

25. arccos et arcsin dont dérivables sur]-1,1[et $\arccos'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$ et $\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

arctan est dérivable sur IR et $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

26.

x	-1	-1/2	0	1/2	1
arccos(x)	π	$2\pi/3$	$\pi/2$	$\pi/3$	0
arcsin(x)	$-\pi/2$	$-\pi/6$	0	$\pi/6$	$\pi/2$

27.

x	$-\infty$	-1	0	$1/\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$
arctanx(x)	$-\pi/2$	$-\pi/4$	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/3$

28. $\forall x \in [-1, 1]$, arccos(x) + arcin(x) = $\frac{\pi}{2}$

$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ \arctan(x) + \arctan(\frac{1}{x}) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \text{ si } x > 0 \\ -\frac{\pi}{2} \text{ si } x < 0 \end{cases}$

29. Soit a > 0

Une primitive de $f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ sur [-a, a] est $F : x \mapsto \arcsin\left(\frac{x}{a}\right)$

Une primitive de $f : x \mapsto \frac{1}{x^2 + a^2}$ sur [-a, a] est $F : x \mapsto \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right)$

30. Pour calculer $\int^x \frac{dt}{at^2 + bt + c}$ sur un intervalle où elle existe, on détermine les racines du dénominateur. Soit $\Delta = b^2 - 4ac$.

Si $\Delta > 0$, on factorise $at^2 + bt + c$ et on décompose en éléments simples

Si $\Delta = 0$, on factorise $at^2 + bt + c$

Si $\Delta < 0$, on met $at^2 + bt + c$ sous forme canonique puis on change de variable.