

Chapitre 12- Limites et continuité d'une fonction numérique-résumé.

Dans tout ce chapitre I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant au moins deux réels.

$\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ désigne les fonctions définies sur I à valeurs réelles.

a désigne un réel de I ou une borne de I , éventuellement $+\infty$ ou $-\infty$, et ℓ est un élément de $\mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$.

0. Notion de voisinage

Def : Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ et a un réel de I ou une borne de I et $\mathcal{P}$ une propriété portant sur f .

- On dit que $\mathcal{P}$ est vraie au voisinage de a lorsque il existe un réel $h > 0$ tel que $\mathcal{P}$ est vraie sur $]a - h, a + h[\cap I$.
- On dit que $\mathcal{P}$ est vraie au voisinage de $+\infty$ lorsque il existe un réel A tel que $\mathcal{P}$ est vraie sur $]A, +\infty[\cap I$.
- On dit que $\mathcal{P}$ est vraie au voisinage de $-\infty$ lorsque il existe un réel A tel que $\mathcal{P}$ est vraie sur $] -\infty, A[\cap I$.

★ Exemples:

- On dit que $M = f(a)$ est un maximum (resp. minimum) local de f si $f(a)$ est le maximum (resp. minimum) de f au voisinage de a c'est-à-dire $\exists h > 0, \forall x \in]a - h, a + h[\cap I, f(x) \leq f(a)$
- f est positive au voisinage de 1 signifie : $\exists h > 0, \forall x \in]1 - h, 1 + h[\cap I, f(x) \geq 0$

1. Limites d'une fonction numérique, continuité en un point.

1.1 Définitions et propriétés immédiates:

Déf: Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$, avec $a \in I$ ou bien a est borne de I et ℓ un réel.

① Cas où $a = +\infty$.

- On dit que f tend vers ℓ quand x tend vers $+\infty$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists x_0 \in \mathbb{R}, \forall x \in I, x \geq x_0 \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon \quad (*)$$

ou encore $\forall \varepsilon > 0, \exists x_0 \in \mathbb{R}, \forall x \in I, x \in [x_0, +\infty[\Rightarrow f(x) \in [\ell - \varepsilon; \ell + \varepsilon]$

- On dit que f tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$ si

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists x_0 \in \mathbb{R}, \forall x \in I, x \geq x_0 \Rightarrow f(x) \geq A \quad (*)$$

ou encore $\forall A \in \mathbb{R}, \exists x_0 \in \mathbb{R}, \forall x \in I, x \in [x_0, +\infty[\Rightarrow f(x) \in [A, +\infty[$

- On dit que f tend vers $-\infty$ quand x tend vers $+\infty$ si

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists x_0 \in \mathbb{R}, \forall x \in I, x \geq x_0 \Rightarrow f(x) \leq A$$

ou encore $\forall A \in \mathbb{R}, \exists x_0 \in \mathbb{R}, \forall x \in I, x \in [x_0, +\infty[\Rightarrow f(x) \in]-\infty, A]$

② Cas où $a = -\infty$

- On dit que f tend vers ℓ quand x tend vers $-\infty$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists x_0 \in \mathbb{R}, \forall x \in I, x \leq x_0 \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$$

ou encore $\forall \varepsilon > 0, \exists x_0 \in \mathbb{R}, \forall x \in I, x \in]-\infty, x_0] \Rightarrow f(x) \in [\ell - \varepsilon; \ell + \varepsilon]$

- On dit que f tend vers $+\infty$ quand x tend vers $-\infty$ si

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists x_0 \in \mathbb{R}, \forall x \in I, x \leq x_0 \Rightarrow f(x) \geq A \quad (*)$$

ou encore $\forall A \in \mathbb{R}, \exists x_0 \in \mathbb{R}, \forall x \in I, x \in]-\infty, x_0] \Rightarrow f(x) \in [A, +\infty[$

- On dit que f tend vers $-\infty$ lorsque x tend vers $-\infty$

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists x_0 \in \mathbb{R}, \forall x \in I, x \leq x_0 \Rightarrow f(x) \leq A$$

ou encore $\forall A \in \mathbb{R}, \exists x_0 \in \mathbb{R}, \forall x \in I, x \in]-\infty, x_0] \Rightarrow f(x) \in]-\infty, A]$

③ Cas où $a \in \mathbb{R}$

• On dit que f tend vers ℓ quand x tend vers a si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists h > 0, \forall x \in I, |x - a| \leq h \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon \quad (*)$$

ou encore $\forall \varepsilon > 0, \exists h > 0, \forall x \in I, x \in [a - h, a + h] \Rightarrow f(x) \in [\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon]$

• On dit que f tend vers $+\infty$ quand x tend vers a si

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists h > 0, \forall x \in I, |x - a| \leq h \Rightarrow f(x) \geq A \quad (*)$$

ou encore $\forall A \in \mathbb{R}, \exists h > 0, \forall x \in I, x \in [a - h, a + h] \Rightarrow f(x) \in [A, +\infty[$

• On dit que f tend vers $-\infty$ quand x tend vers a si

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists h > 0, \forall x \in I, |x - a| \leq h \Rightarrow f(x) \leq A$$

ou encore $\forall A \in \mathbb{R}, \exists h > 0, \forall x \in I, x \in [a - h, a + h] \Rightarrow f(x) \in]-\infty, A]$

Proposition 12.1 : Si f admet une limite en a selon l'une des définitions précédentes alors cette limite est unique et on note $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$ ou $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$ ou encore $\lim_f = \ell$

Interprétation graphique :

★ Lorsque $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$, la droite $y = \ell$ est asymptote horizontale à la courbe représentative de f .

★ Lorsque $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$ avec a réel, la droite $x = a$ est asymptote verticale à la courbe représentative de f .

★ Lorsque $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$, la courbe représentative de f possède une branche infinie dont il faut étudier la nature (revoir le chapitre 3).

Proposition 12.2 : Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$, a un réel de I ou une borne de I , ℓ un réel évent. $\pm\infty$.

① Si $\ell \in \mathbb{R}$, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} (f(x) - \ell) = 0$

② Si $a \in \mathbb{R}$, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell \Leftrightarrow \lim_{h \rightarrow 0} f(a + h) = \ell$

③ Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$ avec a réel, alors f est bornée au voisinage de a .

④ Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ alors $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = |\ell|$

⑤ Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$ avec $\ell > 0$ ou $\ell = +\infty$, alors f est strictement positive au voisinage de a

1.2 Caractérisation séquentielle de la limite

Théorème 12.1 : Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$, a un réel de I ou une borne de I et ℓ un réel évent. $\pm\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell \Leftrightarrow (\forall u \in \mathbb{I}^{\mathbb{N}}, \lim u_n = a \Rightarrow \lim f(u_n) = \ell)$$

Dans la pratique:

★ Si f a pour limite ℓ en a alors, pour toute suite (u_n) à valeurs dans I , $\lim u_n = a \Rightarrow \lim f(u_n) = \ell$

Par exemple, si $u_n \rightarrow -\infty$ alors $\exp(u_n) \rightarrow 0$

★ Pour montrer qu'une fonction f définie sur I n'a pas de limite en a , il suffit de:

trouver deux suites u et v à valeurs dans I telles que $\lim u_n = \lim v_n = a$ et $\lim f(u_n) \neq \lim f(v_n)$.

🔗 Application classique : Montrer que la fonction $\sin$ n'admet pas de limite en $+\infty$.

1.3 Limite à droite et limite à gauche

Def: Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$, a un réel de I ou une borne de I , ℓ un réel évent. $\pm\infty$.

① f a pour limite ℓ à droite de a lorsque la restriction de f à $I \cap]a, +\infty[$ admet pour limite ℓ en a

Pour $\ell \in \mathbb{R}$: $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in I, x \in]a; a + \alpha] \Rightarrow f(x) \in [\ell - \varepsilon; \ell + \varepsilon]$

② f a pour limite ℓ à gauche de a lorsque la restriction de f à $I \cap]-\infty; a[$ admet pour limite ℓ en a .

Pour $\ell \in \mathbb{R}$: $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in I, x \in [a - \alpha; a[\Rightarrow f(x) \in [\ell - \varepsilon; \ell + \varepsilon]$

Notations: $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) = \lim_{a^+} f = \ell$ et $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x) = \lim_{a^-} f = \ell$

Remarque: Si a est une borne de I , par exemple $a = \inf(I)$, alors la notion de limite en a se confond avec la notion de limite à droite de a et on peut noter $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ ou lieu de $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$.

Proposition 12.3: Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$, a un réel de I mais pas une borne de I , ℓ un réel évent. $\pm\infty$.

Si f a pour limite ℓ en a alors f admet ℓ comme limite à droite et à gauche de a

ou encore: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \ell$.

Attention: La réciproque est fautive. *Faire un dessin*

Def: Soit f est définie sur $I \setminus \{a\}$, si $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \ell$ alors on dit que f admet ℓ comme limite en a et on note $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$.

1.4 Continuité en a réel

Théorème 12.2 et définition: Soit f définie sur I et a un réel de I .

Si f admet une limite ℓ en a alors $\ell = f(a)$ et dans ce cas on dit que f est continue en a .

Remarque: On a les caractérisations suivantes

★ f est continue en $a \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

★ f est continue en $a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists h > 0, \forall x \in I, |x - a| \leq h \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon$

★ f est continue en $a \Leftrightarrow (\forall u \in \mathbb{I}^{\mathbb{N}}, \lim u_n = a \Rightarrow \lim f(u_n) = f(a))$.

Def: Soit f définie sur I et a un réel de I

① Si $a \neq \sup(I)$, on dit que f est continue à droite de a lorsque $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$

② Si $a \neq \inf(I)$, on dit que f est continue à gauche de a lorsque $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$

Remarque: Si a n'est pas une borne de I , f est continue en a ssi f est continue à gauche et à droite de a .

1.5 Prolongement par continuité en a .

Def: Soit f définie sur $I \setminus \{a\}$. Si f admet une limite ℓ en a , alors on peut prolonger f par continuité sur

I en posant $\tilde{f}: x \mapsto \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq a \\ \ell & \text{sinon} \end{cases}$. La fonction $\tilde{f}$ est continue en a .

Remarques:

★ f définie sur $I \setminus \{a\}$ admet une limite finie en a ssi f est prolongeable par continuité en a .

★ Si un tel prolongement existe, il est unique

2. Outil de calcul des limites d'une fonction

2.1 Opérations sur les limites

Proposition 12.4: Soit f et $g \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ a un réel de I ou une borne de I .

Si g est bornée au voisinage de a et si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ alors $\lim_{x \rightarrow a} (fg)(x) = 0$

Proposition 12.5 Soit f et g des fonctions définies sur I , a un réel de I ou une borne de I , ℓ et $\ell' \in \mathbb{R}$.

① Somme

$\lim_a f$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim_a g$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim_a (f + g)$	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	FI

② Produit

$\lim_a f$	ℓ	$\ell > 0$	$\ell > 0$	$\ell < 0$	$\ell < 0$	0	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim_a g$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim_a (f \times g)$	$\ell\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$

③ Quotient

$\lim_a f$	ℓ	ℓ	$\ell > 0$	$\ell > 0$	$\ell < 0$	$\ell < 0$	0
$\lim_a g$	$\ell' \neq 0$	$\pm\infty$	0^+	0^-	0^+	0^-	0
$\lim_a (f / g)$	ℓ / ℓ'	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI

$\lim_a f$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
$\lim_a g$	$\ell' > 0$ ou 0^+	$\ell' < 0$ ou 0^-	$\ell' > 0$ ou 0^+	$\ell' < 0$ ou 0^-	$\pm\infty$
$\lim_a (f / g)$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI

Preuve : La caractérisation séquentielle de la limite permet de déduire ces propriétés de celles des limites de suites.

Attention: Ce tableau traduit des implications: Si $\lim f = \ell$ et $\lim g = \ell'$ alors $\lim(f + g) = \ell + \ell'$

Proposition 12.6: Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ et $g \in \mathcal{F}(J, \mathbb{R})$ avec $f(I) \subset J$.

Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ et $\lim_{x \rightarrow b} g(x) = \ell$ alors $\lim_{x \rightarrow a} (g \circ f)(x) = \ell$

2.2 Limites et ordre:

Proposition 12.7: Soit f et $g \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ admettant toutes les deux une limite finie en $a \in I$ ou borne de I .

Si $f \leq g$ ($\clubsuit$) au voisinage de a alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow a} g(x)$

Attention : On dit qu'on passe à la limite dans ($\clubsuit$). Ceci n'est possible qu'après avoir établi l'existence des deux limites. Une inégalité stricte ($f < g$) devient large par passage à la limite.

Théorème des gendarmes pour les fonctions: Soit f, g et $h \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$, $a \in I$ ou borne de I et $\ell \in \mathbb{R}$.

Si $g \leq f \leq h$ au voisinage de a et si $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \ell$ alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$

Corollaire: Soit f et $g \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$, $a \in I$ ou borne de I et $\ell \in \mathbb{R}$.

Si $|f(x) - \ell| \leq g(x)$ au voisinage de a et si $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$

Théorème de comparaison pour les fonctions: Soit f et $g \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$, $a \in I$ ou borne de I .

- ① Si $f \leq g$ au voisinage de a et $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ alors $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty$
 ② Si $f \leq g$ au voisinage de a et $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = -\infty$ alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$

2.3 Limites des fonctions monotones sur un intervalle.

Théorème de la limite monotone pour les fonctions: Soit f une fonction définie et croissante sur un intervalle ouvert $I =]a, b[$ et ℓ un réel.

- ① Si f est majorée, alors f admet une limite finie en b : $\lim_{x \rightarrow b} f = \sup_I f$

Sinon, $\lim_{x \rightarrow b} f = +\infty$

- ② Si f est minorée, alors f admet une limite finie en a : $\lim_{x \rightarrow a} f = \inf_I f$

Sinon, $\lim_{x \rightarrow a} f = -\infty$

Remarque : Cette proposition s'adapte au cas où f est décroissante sur $]a, b[$.

Conséquence: Si f est croissante sur $]a, b[$ et si $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = \ell$ alors $\forall x \in]a, b[, f(x) \leq \ell$

Corollaire: Si f est une fonction croissante sur $I =]a, b[$ alors f admet en tout point x_0 de $]a, b[$ une limite à droite et à gauche en x_0 vérifiant: $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \leq f(x_0) \leq \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$

★ Remarque : Cette proposition s'adapte au cas où f est décroissante sur $]a, b[$.

3. Continuité sur un intervalle

3.1 Définition

Def: Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$. f est continue sur I lorsque f est continue en tout point de I .

ou encore $\forall a \in I, \forall \varepsilon > 0, \exists h > 0, \forall x \in I, |x - a| \leq h \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon$

Notations: On note $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ ou $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues sur I .

Exemples: $x \mapsto |x|$, $x \mapsto \sqrt{x}$, $x \mapsto x^n$, $x \mapsto \sin x$, $x \mapsto \cos x$, $x \mapsto e^x$ sont continues sur leur ensemble de définition

Contre-exemple : la fonction partie entière est continue sur tout intervalle $]n, n+1[$ où $n \in \mathbb{Z}$. Elle est en revanche discontinue en tout point n de $\mathbb{Z}$.

Remarque: Si f est continue sur I alors, pour tout intervalle J inclus dans I , la restriction de f à J est encore continue.

3.2 Opérations sur les fonctions continues

Proposition 12.8: Soit f et g continue sur I .

- ① Si f et g sont continues sur I alors $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, (\alpha f + \beta g)$ est continue sur I .
 ② Si f et g sont continues sur I alors $(f \times g)$ est continue sur I .
 ③ Si f et g sont continues sur I et si $\forall x \in I, g(x) \neq 0$, alors $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, (f/g)$ est continue sur I .

Conséquences:

- ★ Les fonctions polynômes sont continues sur $\mathbb{R}$ comme combinaison linéaire des fonctions puissances entières.
- ★ Les fonctions rationnelles et la fonction tan sont continues comme quotient de fonctions continues sur tout intervalle où elles sont définies.

Proposition 12.9: Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ et $g \in \mathcal{F}(J, \mathbb{R})$ avec $f(I) \subset J$. Si f est continue sur I et g est continue sur J alors $g \circ f$ est continue sur I .

Conséquences:

- ★ ch, sh sont continues sur leur ensemble de définition.
- ★ Si f est continue sur I , alors $|f|$ est continue sur I .

3.3 Propriétés des fonctions continues sur un intervalle.a) Le théorème des valeurs intermédiaires

Propriété de Cauchy: Soit f une fonction continue sur I . S'il existe a et b dans I tels que $f(a)f(b) \leq 0$ alors f s'annule au moins une fois sur I cad $\exists c \in I, f(c) = 0$

Théorème des valeurs intermédiaire: Soit f une fonction continue sur I et $a, b \in I$.

Pour tout réel λ compris entre $f(a)$ et $f(b)$ il existe $c \in I$ tel que $f(c) = \lambda$ ou encore $f(x) = \lambda$ admet au moins une solution sur I .

f prend donc toutes les valeurs intermédiaires entre $f(a)$ et $f(b)$

Corollaire: Si f est continue sur un intervalle I alors $f(I)$ est un intervalle.

Remarque: Le TVI est un théorème d'existence et ne permet pas de déterminer les valeurs des antécédent de λ par f .

Applications classiques:

- Tout polynôme de $\mathbb{R}[X]$ de degré impair s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}$.
- Si f est continue sur I et ne s'annule pas sur I alors f garde un signe constant sur I .
- Si f est continue sur $I = [a, b]$ avec I stable par f alors f admet un point fixe (12.16)

b) Fonction continue sur un segment:

Théorème des bornes atteintes: Si f est continue sur $I = [a, b]$, alors f est bornée et atteint ses bornes, ou encore :

$\min_I f$ et $\max_I f$ existe et il existe c et d dans I tels que $\min_I f = f(c)$ et $\max_I f = f(d)$

Conséquence: On a $f([a, b]) = [m, M]$ donc l'image d'un segment par une fonction continue est un segment.

c) Bijection continue

Théorème de la bijection continue: Si f est continue et strictement monotone sur I alors

- $J = f(I)$ est un intervalle.
- f réalise une bijection de I dans J
- f^{-1} est continue sur J , strictement monotone sur J , de même monotonie que f

Rappel: La représentation graphique de f^{-1} est l'image de celle de f par la symétrie d'axe $y = x$

Applications: $\ln$ (et par composition $x \mapsto x^a, x \mapsto a^x$), $\arcsin$, $\arccos$ et $\arctan$ sont continues sur les intervalles où elles sont définies.

4. Extension rapide aux fonctions à valeurs complexes

Dans ce paragraphe, $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{C})$, I intervalle de $\mathbb{R}$, $a \in I$ ou borne de I et $\ell \in \mathbb{C}$.

$|\cdot|$ désigne le module.

Déf: On dit que f a pour limite ℓ en a lorsque $\forall \varepsilon > 0, \exists h > 0, \forall x \in I, |x - a| \leq h \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$

Conséquence : Si f admet une limite ℓ en a alors f est bornée au voisinage de a .

Proposition 12.10: f admet pour limite ℓ en a ssi $\operatorname{Re}(f)$ admet pour limite $\operatorname{Re}(\ell)$ et $\operatorname{Im}(f)$ admet pour limite $\operatorname{Im}(\ell)$ en a .

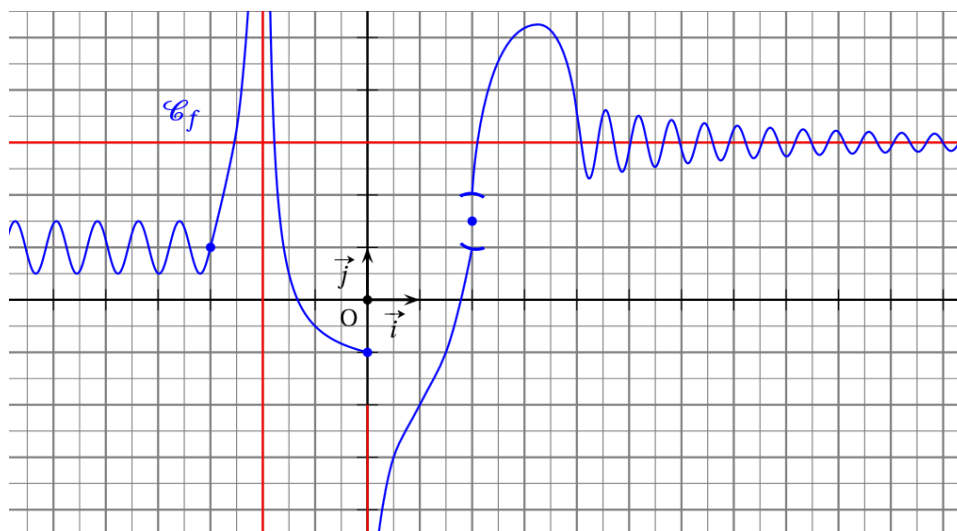
Conséquences: Tous les résultats sur les limites vus dans ce chapitre restent valables sauf les résultats concernant l'ordre.

Def: Soit $a \in I$, f est continue en a lorsque f admet une limite en a nécessairement égale à $f(a)$.
On dit que f est continue sur I lorsque f est continue en tout point de I .

Proposition 12.11: f est continue en a ssi $\operatorname{Re}(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$ sont continues en a .

★ Conséquence: la somme, le produit par un scalaire, le produit, le quotient et la composée (si ils existent) de deux fonctions continues est continue.

Annexe 1 : On donne, ci-dessous, l'allure de $\mathcal{C}_f$ courbe représentative d'une fonction f :



1. Quel est l'ensemble de définition de la fonction f ?
2. Déterminer, si elles existent, les limites de f aux bornes de son domaine de définition.
3. Sur quels intervalles, la fonction f est-elle continue ?

Annexe 2 : Démonstration du théorème des bornes atteintes - HP

On note $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$

Préliminaire: Soit A une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$, on pose $M = \sup(A)$.

Soit $n \in \mathbb{N}$, $(M - \frac{1}{n+1})$ ne majore pas A donc $\exists a_n \in A$, $M - \frac{1}{n+1} < a_n < M$.

Il existe donc une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans A qui converge vers $M = \sup(A)$.

Démonstration du théorème:

On pose $J = f([a, b])$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, J est un intervalle de $\mathbb{R}$.

On pose M la borne supérieure de J dans $\overline{\mathbb{R}}$ et m sa borne inférieure dans $\overline{\mathbb{R}}$.

On va montrer que M et m sont deux réels de J

• Montrons que J est majoré:

Par l'absurde, on suppose que $J = f(I) = \{f(x), x \in I\}$ n'est pas majoré.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'ensemble $E_n = \{x \in I, f(x) \geq n\}$ est non vide et minoré (car $E_n \subset I$). D'après le résultat préliminaire il existe une suite $(x_{n,p})$ d'éléments de E_n telle que $\lim_{p \rightarrow +\infty} x_{n,p} = x_n$.

De plus, on a : $\forall n \in \mathbb{N}, E_n \subset I = [a, b]$. On a donc : $\forall (n, p) \in \mathbb{N}^2, x_{n,p} \in I = [a, b]$.

Donc, en passant à la limite quand p tend vers $+\infty$, on a : $\forall n \in \mathbb{N}, x_n \in I = [a, b]$.

Or par hypothèse, la fonction f est continue sur $[a, b]$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f est continue en x_n . On a donc : $\lim_{p \rightarrow +\infty} f(x_{n,p}) = f(x_n)$.

De plus, on a : $\forall (n, p) \in \mathbb{N}^2, x_{n,p} \in E_n$. Ainsi, on a : $\forall (n, p) \in \mathbb{N}^2, f(x_{n,p}) \geq n$.

Donc, en passant à la limite quand p tend vers $+\infty$, on a : $\forall n \in \mathbb{N}, f(x_n) \geq n$.

Par comparaison, on obtient: $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = +\infty$ (♦)

On remarque que : $\forall n \in \mathbb{N}, E_{n+1} \subset E_n$ donc on a : $\forall n \in \mathbb{N}, \inf E_{n+1} \geq \inf E_n$.

C'est-à-dire que : $\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} \geq x_n$ et la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

Or on a vu que : $\forall n \in \mathbb{N}, x_n \in [a, b]$. Donc la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et majorée par b donc d'après le théorème de la limite monotone, la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente. On note ℓ sa limite.

On a : $\forall n \in \mathbb{N}, x_n \in I = [a, b]$ donc $\ell \in [a, b]$ et ainsi, f est continue en ℓ .

On a alors : $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = f(\ell) \in \mathbb{R}$. Ce qui contredit (♦) (OUF!)

Bilan: L'ensemble J est majoré et donc $M = \sup J \in \mathbb{R}$.

De même, on montre que l'ensemble J est minorée et donc que $m = \inf J \in \mathbb{R}$.

• Montrons que: $M \in J$:

Le résultat préliminaire assure l'existence d'une suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ $\forall n \in \mathbb{N}, M - \frac{1}{n+1} < \alpha_n \leq M$.

Comme $J = f(I)$, $\forall n \in \mathbb{N}, \exists \beta_n \in I$, $\alpha_n = f(\beta_n)$ et on a $\forall n \in \mathbb{N}, M - \frac{1}{n+1} < f(\beta_n) \leq M$.

Ainsi, l'ensemble $F_n = \{x \in I, M - \frac{1}{n+1} < f(x) \leq M\}$ est non vide et minorée (car $F_n \subset I$ et I est minoré)

donc F_n admet une borne inférieure et pour $n \in \mathbb{N}$, on pose : $x_n = \inf F_n$.

Comme dans le point précédent, on montre que : $\forall n \in \mathbb{N}, x_n \in F_n$ et $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et convergente vers un réel $\ell' \in I = [a, b]$.

Comme, $\forall n \in \mathbb{N}, x_n \in F_n$, on a : $\forall n \in \mathbb{N}, M - \frac{1}{n+1} < f(x_n) \leq M$

En passant à la limite quand n tend vers $+\infty$, on obtient: $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = M$

Or la fonction f étant continue en ℓ' , on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = f(\ell') \in \mathbb{R}$.

Par unicité de la limite, on a donc : $M = f(\ell') \in J = f(I)$ CQFD !

De même, on montre que : $m \in J$.

Annexe 3 : Démonstration du théorème de la bijection continue.

• Le théorème des valeurs intermédiaires assure que $f(I)$ est un intervalle.

• Par construction, la fonction $\tilde{f} : I \rightarrow J = f(I)$ est surjective.

De plus, comme f est strictement monotone, la fonction $\tilde{f}$ est injective de I dans J .

On a donc que $\tilde{f}$ réalise une bijection de I sur l'intervalle $J = f(I)$ et on peut définir sa bijection réciproque $\tilde{f}^{-1} : J \rightarrow I$. Dans la suite de la démonstration, on confond f et $\tilde{f}$.

• Quitte à considérer $-f$, on peut supposer que f est strictement croissante sur I .

Montrons que : f^{-1} est strictement croissante sur J .

Soit $(y, y') \in J^2$ tel que $y < y'$ ($\heartsuit$). On pose : $x = f^{-1}(y)$ et $x' = f^{-1}(y')$.

Si $x \geq x'$, comme f est strictement croissante sur I , on a : $f(x) \geq f(x')$, c'est-à-dire $y \geq y'$, ce qui est contraire à ($\heartsuit$), donc, nécessairement, on a : $x < x'$, c'est-à-dire : $f^{-1}(y) < f^{-1}(y')$ et ainsi f^{-1} est strictement croissante sur J .

Montrons que : f^{-1} est continue sur J .

Soit $b \in J = f(I)$. Montrons que f^{-1} est continue en b c'est-à-dire que $\lim_{y \rightarrow b} f^{-1}(y) = f^{-1}(b)$.

Soit $\varepsilon > 0$. On pose : $a = f^{-1}(b)$. On se place dans le cas où a n'est pas une borne de I , les autres cas se traitent de façon similaire.

On peut alors choisir ε assez petit pour avoir $]a - \varepsilon, a + \varepsilon[\subset I$. *faire un dessin.*

On cherche à montrer qu'il existe $\eta > 0$ tel que :

$$\forall y \in J \cap]b - \eta, b + \eta[\Rightarrow |f^{-1}(y) - f^{-1}(b)| < \varepsilon.$$

Comme f est croissante sur I , on a :

$$|f^{-1}(y) - f^{-1}(b)| < \varepsilon \Leftrightarrow f^{-1}(b) - \varepsilon < f^{-1}(y) < f^{-1}(b) + \varepsilon \Leftrightarrow a - \varepsilon < f^{-1}(y) < a + \varepsilon \Leftrightarrow f(a - \varepsilon) < y < f(a + \varepsilon) \quad (\spadesuit)$$

On cherche donc à montrer qu'il existe $\eta > 0$ tel que :

$$\forall y \in J, y \in]b - \eta, b + \eta[\Rightarrow f(a - \varepsilon) < y < f(a + \varepsilon).$$

On a : $a - \varepsilon < a$ et f est strictement croissante sur I , donc on a : $f(a - \varepsilon) < f(a) = b$

d'où : $\exists \eta_1 > 0, b - \eta_1 = f(a - \varepsilon)$.

On a : $a < a + \varepsilon$ et f est strictement croissante sur I , donc on a : $f(a) = b < f(a + \varepsilon)$

d'où : $\exists \eta_2 > 0, b + \eta_2 = f(a + \varepsilon)$.

On pose : $\eta = \min(\eta_1, \eta_2)$. On a : $f(a - \varepsilon) = b - \eta_1 \leq b - \eta < b < b + \eta \leq b + \eta_2 = f(a + \varepsilon)$.

On a donc : $[b - \eta, b + \eta] \subset [f(a - \varepsilon), f(a + \varepsilon)] \subset f(I)$ (car $f(I)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$).

C'est-à-dire que pour tout y de $f(I)$, on a : $y \in [b - \eta, b + \eta] \Rightarrow y \in [f(a - \varepsilon), f(a + \varepsilon)]$

En utilisant ($\spadesuit$), on a donc : $\exists \eta > 0, \forall y \in f(I), y \in [b - \eta, b + \eta] \Rightarrow |f^{-1}(y) - f^{-1}(b)| \leq \varepsilon$

On a donc : $\lim_{y \rightarrow b} f^{-1}(y) = f^{-1}(b)$ et f^{-1} est continue en b . (C'EST GAGNE !)

CC1: f^{-1} est continue sur l'intervalle J .