Exercices – Chapitre 13: Matrices et systèmes linéaires

♦ Eléments de correction en ligne - ♥ Exo à savoir refaire

Calcul dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$:

♦ **13.1** On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

a. Déterminer les matrices B de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui commutent avec A c'est-à-dire telles que AB = BA

b. Résoudre l'équation $X^2 - 2X = A$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

13.2 Soit $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice de terme général égal à 1.

Montrer que $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $JAJ = s(A)J$ où $s(A)$ est la somme de tous les termes de A.

13.3 Une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite stochastique si la somme de tous les éléments de chacune de ses colonnes est égale à 1. Montrer que si A et B sont stochastique alors C = AB est aussi stochastique.

13.4 Déterminer toutes les matrices $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que : $\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $MX = XM$.

Ind. Quel est l'effet de la multiplication à droite ou à gauche de A par $E_{ij} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

Opérations élémentaires :

13.5 Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$.

Montrer qu'en appliquant des OEL et des OEC sur M, on peut obtenir la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Systèmes linéaires :

13.6 Résoudre les systèmes suivants dans $\mathbb{R}^3$:

a) $\begin{cases} x - y + 2z = 1 \\ 2x - 3y + z = 4 \\ x - 3y - 4z = 5 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ -x - 3y + 5z = 2 \\ x + y + z = -1 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} 2x - y + 3z = 1 \\ x + y - z = 2 \\ x - 2y + 4z = 1 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + 2y - 2z = 2 \\ -x - y + z = -1 \end{cases}$

13.7 Résoudre les systèmes suivants :

a) $\begin{cases} x - y + 2z = 1 \\ x + 4z = 3 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 2x + y = 2 \\ x + 2y = 1 \\ -x + y = 1 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} x - y + z + 3t = -1 \\ 2y - 3z + t = 0 \\ x + 2z - t = 2 \end{cases}$

13.8 Résoudre les systèmes suivants où λ est un réel quelconque fixé

(S₁): $\begin{cases} 2x + \lambda y - z = 5 \\ (\lambda - 5)x + 3y + 7z = 7 \\ x + 3y + 2z = 4 \end{cases}$ **(S₂):** $\begin{cases} x - y + z - t = 1 \\ y - 2z + 3t = 2 \\ 4y - 8z + 5t = 1 \\ 3y - 6z + 2t = \lambda \end{cases}$

13.9 Résoudre dans $\mathbb{C}^3$ les systèmes suivants, où $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et a, b, c et m sont des complexes quelconques fixés.

(S₁): $\begin{cases} x+y+z=a \\ x+j^2y+jz=b \\ x+jy+j^2z=c \end{cases}$ **(S₂):** $\begin{cases} x-my+m^2z=2m \\ mx-m^2y+mz=2m \\ mx+y-m^2z=1-m \end{cases}$

13.10 Résoudre les systèmes suivants dans $\mathbb{C}^n$:

(S_4): $\begin{cases} x_1-x_2=a_1 \\ x_2-x_3=a_2 \\ \vdots \\ x_{n-1}-x_n=a_{n-1} \\ x_n=a_n \end{cases}$; où $a_i \in \mathbb{C}$, $1 \le i \le n$ (S_5): $\begin{cases} x_1+x_2+\dots x_n=1 \\ x_1+2x_2+\dots+2x_n=1 \\ x_1+2x_2+3x_3+\dots+3x_n=1 \\ \vdots \\ x_1+2x_2+3x_3+\dots+nx_n=1 \end{cases}$

Matrices carrées de petite dimension

13.11 Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

a. Montrer qu'il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $A^2 = \alpha A + \beta I_2$

b. Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists (\alpha_n, \beta_n) \in \mathbb{R}^2$, $A^n = \alpha_n A + \beta_n I_2$.

Préciser des relations de récurrence liant les différents termes des suites (α_n) et (β_n).

c. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de A^n en fonction de n.

13.12 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Calculer A^2 et A^3. En déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

13.13 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. On pose $N = A - I_3$.

Montrer que N est nilpotente et en déduire l'expression de A^n en fonction de n.

13.14 Soit $J \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ la matrice de terme général égal à 1.

a. Pour $p \in \mathbb{N}$, déterminer J^p.

b. On considère $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, déterminer A^n.

♦ **13.15** Donner les puissances nièmes des matrices suivantes

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ $M = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ $N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

♦ **13.16** Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a. Exprimer A^2 en fonction de A et I_3.

b. Montrer qu'il existe deux suites (u_n) et (v_n) vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}$, $A^n = u_n A + v_n I_3$.

c. Calculer u_n et v_n en fonction n et en déduire une expression de A^n, pour $n \in \mathbb{N}$.

d. En utilisant des OEL, montrer que A est inversible et déterminer A^{-1}

e. Retrouver le résultat précédent avec la question a.

13.17 Soit B = $\begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Calculer B^2. B est-elle inversible?

♦ **13.18** Justifier que les matrices suivantes sont inversibles et donner leurs inverses :

$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad D = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

13.19 ***Matrice dépendant d'un paramètre***

a. Déterminer pour quelles valeurs du réel a, la matrice M = $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -a & 1 & 0 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix}$ est inversible.

♦ **b.** Pour quelles valeurs de $m \in \mathbb{R}$, la matrice $A_m = \begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix}$ est-elle inversible ?

c. Soit $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$. On pose : A = $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & c & a & c \\ b & b & d & d \\ ab & cb & ad & cd \end{pmatrix}$. Donner une CNS pour que A soit inversible

---

Matrices carrées en dimension quelconque

13.20 Soit B matrice carrée d'ordre n telle que $B^2 = I_n$. Calculer, pour tout p de $\mathbb{N}^*$, $(B + I_n)^p$.

13.21 Soit A une matrice carrée d'ordre n nilpotente, c'est-à-dire qu'il existe un entier p tel que $A^p = 0_n$.

Montrer que $I_n - A$ est inversible et préciser son inverse.

13.22 Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice définie par : $a_{i,j} = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \text{ ou } j = i + 1 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$. Déterminer A^p, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$.

♥ **13.23** Soit $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice de terme général égal à 1. Pour $p \in \mathbb{N}^*$, calculer J^p.

a. Soit $A = (a_{ij})_{1\le i,\, j\le n}$ d'ordre n telle que : $\exists (a, b) \in \mathbb{R}^2$, $a_{i,j} = \begin{cases} a \text{ si } i = j \\ b \text{ sinon} \end{cases}$. Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, calculer A^p.

b. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur a et b pour que la matrice A précédente soit inversible

♥ **13.24** Soit $U = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ deux matrices de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On pose $\alpha = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i$

a. Calculer $U.V^T$ et $V^T.U$.

b. On pose : $A = U.V^T + I_n$. Calculer A^2 en fonction de A, I_n et α.

c. En déduire une CNS pour que la matrice A soit inversible. Quand elle existe, calculer A^{-1}.

13.25 Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, telle que : $a_{ij} = \begin{cases} 1 + \alpha_i & \text{si } i = j \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$ avec $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in (\mathbb{R}^*_+)^n$.

a. Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. En écrivant A comme une somme de matrices « intéressantes », calculer X^TAX.

b. En déduire que la matrice A est inversible.

Petits Problèmes :

13.26 ***Matrice à diagonale strictement dominante.***

Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que : $\forall i\in [\![1, n]\!]$, $|a_{ii}| > \sum\limits_{k\neq i} |a_{ik}|$. Montrer par l'absurde que la matrice A est inversible.

13.27 Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a. Montrer que la matrice P est inversible et calculer P^{-1}.
b. On pose : $D = P^{-1}A\,P$. Déterminer D^n pour $n\in\mathbb{N}$.
c. En déduire A^n en fonction de $n\in\mathbb{N}$.
d. Soient (x_n), (y_n) et (z_n) trois suites réelles définies par leurs premiers termes x_0, y_0 et z_0 et les relations de récurrence :

$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} x_{n+1} = 2x_n - z_n \\ y_{n+1} = -4x_n + 2z_n \\ z_{n+1} = z_n \end{cases}$. Déterminer x_n , y_n et z_n en fonction de n, x_0, y_0 et z_0.

13.28 Pour toute matrice A de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on définit le <u>commutant</u> de A par : $\mathcal{C}(A) = \{ M\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid AM = MA \}$

a. On pose $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -4 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $P = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Montrer que P est inversible puis vérifier que $P^{-1}AP = D$

b. Justifier que $\mathcal{C}(D) = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & d & e \end{pmatrix}, (a,b,c,d,e,) \in \mathbb{R}^5 \right\}$ et en déduire $\mathcal{C}(A)$

♦ **13.29** Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$. On souhaite résoudre l'équation $AX + XA = I_3$ dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

a. Exprimer A^2 en fonction de A et I_3, en déduire que A est inversible et donner A^{-1}.
b. Montrer que si X est solution alors X commute avec A^2 puis avec A et résoudre l'équation.

♦ **13.30** ***Une petite histoire sanglante …***

Lundi, avant le lever du soleil, tout près d'une joyeuse rivière et sous le vert feuillage, *x* loups, *y* chèvres et *z* serpents semblent cohabiter en paix. Mais... Chaque matin de la semaine, aux premiers rayons de l'aurore, chaque loup déguste une chèvre pour son petit déjeuner. Chaque jour, à midi, lorsque le gai soleil darde verticalement ses chauds rayons, chacune des chèvres piétine un serpent, si malencontreusement que celui-ci en trépasse aussitôt. Chaque soir, lorsque l'astre solaire termine sa course vers l'horizon, chacun des serpents, surpris par un loup le pique. Et comme les serpents sont à sonnette, le loup meurt bientôt dans d'atroces souffrances. (♬ *musique lugubre* ♬)
En supposant qu'il y a assez d'animaux pour que le processus se poursuive ainsi toute une semaine et que le dimanche matin, avant le lever du soleil, il n'en reste qu'un. Calculer *x*, *y* et *z*.

♦ **13.31** Soit $A = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

a. Soit $M\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Montrer que : $M^3 = A \Rightarrow AM = MA$.
b. Résoudre l'équation $M^3 = A$ d'inconnue $M\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.