

Programme de colles-semaine 16-27/01 au 31/01

I. Limites et continuité d'une fonction numérique :

- Continuité sur un intervalle, opérations sur les fonctions continues, continuité des fonctions usuelles.
- Propriétés de fonctions continues sur I: Théorème des valeurs intermédiaires, théorème des bornes atteintes, théorème de la bijection continue.
- Extension aux fonctions à valeurs dans \mathbb{C} .

II. Matrices et systèmes linéaires

- Ensemble des matrices à lignes et p colonnes et à coefficients dans K, matrice carrée, matrice ligne, matrice colonne, matrice nulle, matrice identité, matrices élémentaire $E_{i,j}$.
 - Opérations sur les matrices à n lignes et p colonnes, combinaison linéaire, produit.
 - Propriétés des opérations matricielles.
 - Produit à droite et à gauche par les matrices élémentaires $E_{i,j}$. Application à $E_{ij} \cdot E_{k,l} = \delta_{j,k} E_{i,l}$
 - Définition des OEL et des OEC, matrices d'OEL et d'OEC, et interprétation en terme de produit matriciel.
 - Transposition : définition et propriétés de calcul.
 - Système linéaire : Généralités et vocabulaire, interprétation géométrique en dimension 2 et 3, matrice et matrice augmentée d'un système, écriture matricielle d'un système linéaire.
 - OEL pour un système, algorithme du pivot de Gauss
 - On définit le rang du système comme le nombre de pivot à l'issu de l'échelonnement.
- Soit un système de n équations à p inconnues de rang r.
- Si $r = p$ alors le système admet une unique solution
- Si $r < p$ alors le système a r équations principales et n - r condition de compatibilité et donc il admet une infinité de solutions ou aucune solution.
- Matrices carrées, opérations sur les matrices carrées, puissances entières, formule du binôme et de Bernoulli pour deux matrices qui commutent.
 - Matrices carrées particulière : matrices diagonales, triangulaires, symétriques, antisymétriques.
 - Matrices carrées inversibles : définition, exemples, compatibilité avec les opérations, notation $GL_n(\mathbb{K})$.
 - Les OEL et les OEC conservent l'inversibilité.
 - $A \in M_n(\mathbb{K})$ est inversible $\Leftrightarrow \forall B \in M_{n,1}(\mathbb{K}), AX = B$ a une unique solution
 \Leftrightarrow On peut obtenir I_n en appliquant une succession d'OEL à A.
 - Calcul pratique de l'inverse : Système, OEL (pivot de Gauss) transformant $(A|I_n)$ en $(I_n|A^{-1})$.
 - CNS d'inversibilité pour les matrices triangulaires
 - Inversibilité à droite et à gauche : A est inversible ssi A est inversible à gauche Ssi A est inversible à droite. Application au calcul de A^{-1} .
-

Déroulement de la colle:

① Résolution d'un système linéaire de petite dimension sans paramètre.

② Question de cours

- Démonstration de la propriété de Cauchy : Soit f est continue sur I, si il existe a, b ∈ I tels que $f(a)f(b) \leq 0$ alors f s'annule sur I (dichotomie)
- Donner la définition du produit matriciel et montrer l'associativité.
- Montrer que si A et B sont deux matrices triangulaires supérieures alors le produit AB est aussi une matrice triangulaire supérieure
- Calcul de la puissance d'une matrice carrée à l'aide de la formule du binôme.

② Exercice(s) sur le calcul matriciel et les fonctions continues sur un intervalle.

NB : Nous n'avons pas vu la notion de rang d'une matrice.

Evaluation: Connaître son cours est une condition nécessaire pour obtenir une note > 10