## Programme de colles-semaine 17-03/02 au 07/02

### I. Matrices et systèmes linéaires

• Ensemble des matrices à lignes et p colonnes et à coefficients dans K, matrice carrée, matrice ligne, matrice colonne, matrice nulle, matrice identité, matrices élémentaire $E_{i,j}$.
• Opérations sur les matrices à n lignes et p colonnes, combinaison linéaire, produit, propriétés.
• Produit à droite et à gauche par les matrices élémentaires $E_{i,j}$. Application à $E_{ij} \times E_{k,l} = \delta_{j,k} E_{i,l}$
• Définition des OEL et des OEC, matrices d'OEL et d'OEC, et interprétation en terme de produit matriciel.
• Transposition : définition et propriétés de calcul.
• Système linéaire : Généralités et vocabulaire, interprétation géométrique en dimension 2 et 3, matrice et matrice augmentée d'un système, écriture matricielle d'un système linéaire.
• OEL pour un système, algorithme du pivot de Gauss
• On définit le rang du système comme le nombre de pivot à l'issu de l'échelonnement.
Soit un système de n équations à p inconnues de rang r.
Si r = p alors le système admet une unique solution
Si r < p alors le système a r équations principales et n - r condition de compatibilité et donc il admet une infinité de solutions ou aucune solution.
• Matrices carrées, opérations sur les matrices carrées, puissances entières, formule du binôme et de Bernoulli pour deux matrices qui commutent.
• Matrices carrées particulière : matrices diagonales, triangulaires, symétriques, antisymétriques.
• Matrices carrées inversibles : définition, exemples, compatibilité avec les opérations, notation $GL_n(\mathbb{K})$.
• Les OEL et les OEC conservent l'inversibilité.
• $A \in M_n(\mathbb{K})$ est inversible $\Leftrightarrow \forall B \in M_{n,1}(\mathbb{K})$, AX = B a une unique solution

$\Leftrightarrow$ On peut obtenir $I_n$ en appliquant une succession d'OEL à A.

• Calcul pratique de l'inverse : Système, OEL (pivot de Gauss) transformant $(A|I_n)$ en $(I_n|A^{-1})$.
• CNS d'inversibilité pour les matrices triangulaires
• Inversibilité à droite et à gauche : A est inversible ssi A est inversile à gauche ssi A est inversible à droite. Application au calcul de $A^{-1}$.

### I. Dérivabilité d'une fonction numérique.

• Dérivabilité en a, dérivabilité à droite et à gauche, interprétation graphique : tangente et demi-tangente.
• f est dérivable en a ssi il existe $\varepsilon : I \to \mathbb{R}$, de limite nulle en a et $\alpha \in \mathbb{R}$ telle que :
$\forall x \in I,\ f(x) = f(a) + \alpha(x-a) + (x-a)\varepsilon(x)$. Dans ce cas, $f'(a) = \alpha$
• Dérivabilité sur un intervalle, fonction dérivée, opération sur les dérivées, dérivation de la composée, de la bijection réciproque.
• Théorèmes sur les fonctions dérivables:
  ★ Si f dérivable en a avec f(a) extremum local alors f'(a) = 0.
  ★ Théorème de Rolle
  ★ Théorème des accroissement finis.

## Déroulement de la colle:

① Résolution d'un système linéaire de petite dimension avec ou sans paramètres. (10 min maximum)

② Question de cours

- Montrer que si A et B sont deux matrices triangulaires supérieures alors le produit AB est aussi une matrice triangulaire supérieure
- Calcul de la puissance d'une matrice carrée à l'aide de la formule du binôme.
- Enoncé et démonstration du théorème de Rolle à illustrer graphiquement
- Enoncé et démonstration du théorème des accroissement finis à illustrer graphiquement

③ Exercices : Matrices, étude de dérivabilité en a puis utilisation de Rolle et des AF si il reste du temps. *NB : Nous n'avons pas vu la notion de rang d'une matrice.*