Programme de colles-semaine 18 - 10/02 au 14/02

Dérivabilité d'une fonction numérique.

- Dérivabilité en a, dérivabilité à droite et à gauche, interprétation graphique : tangente et demi-tangente.
- f est dérivable en a ssi il existe $\varepsilon : I \to \mathbb{R}$, de limite nulle en a et $\alpha \in \mathbb{R}$ telle que :

$\forall x \in I$, $f(x) = f(a) + \alpha(x-a) + (x-a)\varepsilon(x)$. Dans ce cas, $f'(a) = \alpha$

- Dérivabilité sur un intervalle, fonction dérivée, opération sur les dérivées, dérivation de la composée, de la bijection réciproque.
- Théorèmes sur les fonctions dérivables:
  - ★ Si f dérivable en a avec f(a) extremum local alors f'(a) = 0.
  - ★ Théorème de Rolle
  - ★ Théorème des accroissement finis et corollaires : Inégalités des AF et principe de Lagrange.

application: Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur [a, b] alors f est lipschitzienne sur [a, b].

  - ★ Théorème de la limite de la dérivée .
- Dérivées successives, fonctions de classe C^n, de classe C^∞. Opérations sur les fonctions de classe C^n, de classe C^∞, formule de Leibniz, dérivées successives des fonctions usuelles.
- Si f est de classe C^n sur I et telle que $f'(x) \neq 0$ sur I alors f induit une bijection de I sur f(I) et f^{-1} est de classe C^n sur f(I).
- Fonctions convexes, lemme des trois pentes, caractérisation de la convexité pour une fonction dérivable, deux fois dérivables, inégalités classiques :

$\forall x > -1, \ln(1 + x) \leq x$ $\quad\quad$ $\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq x + 1$ $\quad\quad$ $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \frac{2}{\pi}x \leq \sin x \leq x$

- Brève extension aux fonctions à valeurs complexes, utilisation dans les calcul des dérivées nièmes, par exemple, cosinus et sinus

- Application à l'étude de suites récurrente.

Déroulement de la colle:

① Calcul d'une dérivée nième
Formule de Leibniz, récurrence, linéarisation….

② Question de cours

- Enoncé et démonstration du théorème de Rolle à illustrer graphiquement
- Enoncé et démonstration du théorème des accroissement finis à illustrer graphiquement
- Définition d'une fonction convexe à illustrer graphiquement, Donner les trois inégalités de convexité à connaître et savoir les justifier.

③ Exercices : fonctions de classe $\mathcal{C}^n$, étude de suite récurrentes (avec qq indications)