

## Chapitre 14: Dérivabilité d'une fonction numérique - résumé de cours

Dans tout ce chapitre  $I$  désigne un intervalle de  $\mathbb{R}$  contenant au moins deux réels.

$f$  désigne une fonction définie sur  $I$  et  $a$  un réel de  $I$ , ainsi  $f$  est définie en  $a$ .

On note  $C_f$  la courbe représentative de  $f$  dans le plan rapporté à un repère orthonormé.

$\overset{\circ}{I}$  désigne l'intervalle ouvert de même borne que  $I$ .

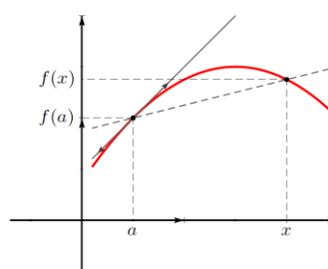
### 1. Dérivée première

#### 1.1 Dérivabilité en $a$

**Rappel!** Pour tout  $x \in I \setminus \{a\}$ ,  $\tau_a(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$  est le taux d'accroissement de  $f$  en  $a$ .

**Def:** Soit  $f$  définie sur  $I$  et  $a \in I$ .

① Si  $a \neq \sup(I)$ , on dit que  $f$  est **dérivable à droite de  $a$**  lorsque  $\tau_a$  admet une limite finie à droite de  $a$ . Lorsque c'est le cas, cette limite est le nombre dérivé à droite de  $a$  noté  $f'_d(a)$ .



② Si  $a \neq \inf(I)$ , on dit que  $f$  est **dérivable à gauche de  $a$**  lorsque  $\tau_a$  admet une limite finie à gauche de  $a$ . Lorsque c'est le cas, cette limite est le nombre dérivé à gauche de  $a$  noté  $f'_g(a)$ .

③ Si  $a \in \overset{\circ}{I}$  on dit que  $f$  est **dérivable en  $a$**  lorsque  $f$  est dérivable à droite et à gauche de  $a$  avec  $f'_d(a) = f'_g(a)$  ssi  $\tau_a$  admet une limite finie en  $a$ .

Lorsque c'est le cas, cette limite est le nombre dérivé de  $f$  en  $a$  noté  $f'(a)$ .

④ Si  $a = \sup(I)$  (resp.  $\inf(I)$ )  $f$  est dérivable en  $a$  lorsque  $f$  est dérivable à gauche (resp. à droite) de  $a$ .

★ **Interprétation graphique :**

- Si  $f$  dérivable en  $a$ , la droite  $y = f(a) + f'(a)(x-a)$  est, par définition, la tangente à la courbe  $C_f$  au point  $A(a, f(a))$ .

- Si  $f$  n'est pas dérivable en  $a$ , on peut avoir les cas suivants:

- Si  $f$  est dérivable à droite (resp. à gauche) de  $a$  alors  $C_f$  admet en  $A$  une demi-tangente de pente  $f'_d(a)$  (resp.  $f'_g(a)$ ).
- Si  $\tau_a$  admet une limite infinie en  $a$  avec  $f$  continue en  $a$  (resp à droite ou à gauche de  $a$ ) alors  $C_f$  admet une tangente (resp. demi-tangente) verticale en  $A$ .
- Si  $\tau_a$  admet des limites à droite et à gauche de  $a$  différentes alors  $A$  est un point anguleux de  $C_f$ .

**Théorème 14.1:** Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  et  $a \in I$ .

$f$  est dérivable en  $a$  **si et seulement si** il existe un réel  $\alpha$  et une fonction  $\varepsilon$  définie sur  $I$  telle que

$$\forall x \in I, f(x) = f(a) + \alpha(x-a) + (x-a)\varepsilon(x) \text{ et } \lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0. (*)$$

Dans ce cas,  $\alpha = f'(a)$

★ Vocabulaire:  $x \mapsto f(a) + f'(a)(x-a)$  est la **meilleure approximation affine de f en a**.

Ainsi pour  $x$  proche de  $a$  on peut remplacer  $f(x)$  par  $f(a) + f'(a)(x-a)$ , l'erreur commise étant négligeable devant  $(x - a)$  : Pour  $|x| \ll 1$ ,  $\sin x \approx x$ , ;  $\tan x \approx x$  et  $(1 + x)^\alpha \approx 1 + \alpha x$

★ Remarque : Pour tout réel  $h$  tel que  $(a + h) \in I$ , on peut poser  $x = a + h$  dans (\*), on obtient :  $f(a+h) = f(a) + f'(a)h + h\varepsilon(h)$  avec  $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$ .

Cette écriture est appelé **développement limité d'ordre 1 de f en a**.

**Corollaire**: Si  $f$  est dérivable en  $a$  alors  $f$  est continue en  $a$

⚠ Attention: réciproque fausse.

## 1.2 Dérivabilité sur un intervalle, fonction dérivée.

**Def**:  $f$  est **dérivable sur I** lorsqu'elle est dérivable en tout point de  $I$ . Dans ce cas, la fonction définie sur  $I$  par  $a \mapsto f'(a)$  est la **fonction dérivée** de  $f$  notée  $f'$  (ou  $\frac{df}{dx}$  ou  $Df$ ).

Notation: On note  $\mathcal{D}^1(I, \mathbb{R})$  ou  $\mathcal{D}(I, \mathbb{R})$  l'ensemble des fonctions dérivables sur  $I$ .

**Proposition 14.1**: Soit  $f$  et  $g \in \mathcal{D}(I, \mathbb{R})$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$

①  $(f + g) \in \mathcal{D}(I, \mathbb{R})$  et  $(f + g)' = f' + g'$      $(\lambda f) \in \mathcal{D}(I, \mathbb{R})$  et  $(\lambda f)' = \lambda f'$

②  $(fg) \in \mathcal{D}(I, \mathbb{R})$  et  $(fg)' = f'g + fg'$

③ Si  $\forall x \in I, g(x) \neq 0$ ,  $(f/g) \in \mathcal{D}(I, \mathbb{R})$  et  $(f/g)' = (f'g - fg')/g^2$

④ Soit  $f \in \mathcal{D}(I, \mathbb{R})$  et  $g \in \mathcal{D}(J, \mathbb{R})$  avec  $f(I) \subset J$ ,  $g \circ f \in \mathcal{D}(I, \mathbb{R})$  et  $(g \circ f)' = f' \cdot (g' \circ f)$ .

## 1.3 Dérivabilité de la bijection réciproque

**Proposition 14.2** : Soit  $f : I \rightarrow J$  bijective et  $a$  un réel de  $I$ .

Si  $f$  est dérivable en  $a$  avec  $f'(a) \neq 0$  alors  $f^{-1}$  est dérivable en  $b = f(a)$  et  $(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}$ .

★ Interprétation graphique: Les courbes représentatives de  $f$  et de  $f^{-1}$  sont symétriques par rapport à  $(y = x)$ .

Lorsque  $f$  est dérivable en  $a$  avec  $f'(a) \neq 0$  alors la courbe représentative de  $f^{-1}$  admet une tangente verticale au point d'abscisse  $f(a)$  de coefficient directeur  $\frac{1}{f'(a)}$ .

Lorsque  $f$  est dérivable en  $a$  avec  $f'(a) = 0$ ,  $f^{-1}$  n'est pas dérivable en  $b = f(a)$  et sa courbe représentative admet une tangente horizontale au point d'abscisse  $b$ .

**Corollaire** :

Soit  $f : I \rightarrow J$  bijective, dérivable sur  $I$  et  $a$  un réel de  $I$ .

Si  $\forall x \in I, f'(x) \neq 0$  alors  $f^{-1}$  est dérivable sur  $J$  et  $(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$ .

## 2. Théorèmes sur les fonctions dérivables:

### 2.1 Dérivée et extremum

**Théorème 14.2:** Soit  $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$  et  $a \in \overset{\circ}{I}$ .  
Si  $f$  est dérivable en  $a$  et si  $f(a)$  est un extremum local alors  $f'(a) = 0$ .

✎ Attention: Réciproque fausse.

★ Dans la pratique: Les extrema locaux d'une fonction sont à chercher là où sa dérivée s'annule, aux bornes de  $I$  et en ses points de non dérivabilité.

### 2.2 Accroissements finis et conséquences

**Théorème de Rolle:** Soit  $f$  continue sur  $[a, b]$  et dérivable sur  $]a, b[$ , avec  $a < b$   
Si  $f(a) = f(b)$  alors il existe  $c \in ]a, b[$  tel que  $f'(c) = 0$ .

★ Graphiquement: existence d'une tangente horizontale entre les points  $A$  et  $B$  d'abscisses  $a$  et  $b$ .

Exercice résolu : Soit  $f$  une fonction  $C^n$  sur  $I$ , montrer que si  $f$  s'annule en  $(n+1)$  points distincts de  $I$  alors  $f^{(n)}$  s'annule au moins une fois sur  $I$ .

**Théorème des accroissements finis:** Soit  $f$  continue sur  $[a, b]$  et dérivable sur  $]a, b[$ , avec  $a < b$ .  
Il existe  $c \in ]a, b[$  tel que  $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$ .

★ Graphiquement: existence d'une tangente parallèle à la corde  $(AB)$  entre  $A$  et  $B$ .

**Corollaire 1: Inégalités des accroissements finis:** Soit  $f$  continue sur un intervalle  $I$ , dérivable sur  $\overset{\circ}{I}$  et  $(a, b) \in I^2$ , avec  $a < b$ .

- ① Si  $\forall x \in ]a, b[, m \leq f'(x) \leq M$ , alors  $m(b - a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b - a)$
- ② Si  $\forall x \in ]a, b[, |f'(x)| \leq M$ , alors  $|f(b) - f(a)| \leq M|b - a|$
- ③ Si  $|f'|$  est bornée par  $M$  sur  $\overset{\circ}{I}$  alors  $\forall (x, y) \in I^2, |f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$

**Def :** Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  et  $k$  un réel,  $k > 0$ .

On dit que  $f$  est  $k$ -lipschitzienne sur  $I$  lorsque  $\forall (x, y) \in I^2, |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$

On dit que  $f$  est lipschitzienne sur  $I$  lorsqu'il existe  $k > 0$  tel que  $f$  est  $k$ -lipschitzienne sur  $I$

Propriété immédiate : Si  $f$  est lipschitzienne sur  $I$  alors  $f$  est continue sur  $I$ .

★ Conséquences des accroissements finis

- Si  $|f'|$  est bornée par  $k$  sur  $\overset{\circ}{I}$  alors  $f$  est  $k$ -lipschitzienne
- Si  $f$  est de classe  $C^1$  sur  $I = [a, b]$  alors  $f'$  est bornée et  $f$  est lipschitzienne sur  $I$ .

**Corollaire 2: Variations d'une fonction dérivable:** Soit  $f$  continue sur  $I$  et dérivable sur  $\overset{\circ}{I}$ .

- ①  $f$  est croissante (resp. décroissante) sur  $I$  ssi  $f' \geq 0$  (resp.  $f' \leq 0$ ) sur  $\overset{\circ}{I}$
- ②  $f$  est constante sur  $I$  ssi  $f' = 0$  sur  $\overset{\circ}{I}$
- ③  $f$  est strictement croissante (resp. décroissante) sur  $I$  ssi  $f' > 0$  (resp.  $f' < 0$ ) sur  $\overset{\circ}{I}$  sauf éventuellement en des points isolés de  $\overset{\circ}{I}$ .

★ Dans la pratique: Attention de bien appliquer ces résultats sur un intervalle.

## 2.3 Obtention de la dérivabilité par passage à la limite dans $f'(x)$

**Théorème de la limite de la dérivée** : Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ , continue et dérivable sur  $I \setminus \{a\}$ .

- ① Si  $\lim_{x \rightarrow a} f'(x) = \ell \in \mathbb{R}$ , alors  $f$  est dérivable en  $a$  et  $f'(a) = \ell$ .
- ② Si  $\lim_{x \rightarrow a} f'(x) = \pm\infty \in \mathbb{R}$ , alors  $f$  n'est pas dérivable en  $a$  et  $C_f$  admet une tangente verticale au point d'abscisse  $a$

⚡ Attention: Aucune notion de prolongement ici,  $f$  est définie en  $a$ , et on ne prolonge pas la dérivée :  $f'(a)$  existe ou pas !

★ Remarque : Avec comme hypothèse  $f$  est de classe  $C^1$  sur  $I \setminus \{a\}$ , on obtient  $f$  de classe  $C^1$  sur  $I$ . En effet,  $f$  est alors dérivable en  $a$  donc sur  $I$  et comme  $f'(a)$  est donnée par la valeur de la limite de  $f'(x)$  en  $a$ ,  $f'$  est continue en  $a$  donc continue sur  $I$ .

## 3. Dérivées successives, fonctions de classe $C^n$ sur $I$ .

### 3.1 Dérivée d'ordre $n$ , classe d'une fonction.

**Def**: On pose  $f^{(0)} = f$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , si  $f^{(n-1)}$  est dérivable sur  $I$ , alors  $f$  est  $n$  fois dérivable sur  $I$  et  $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$ .

$f^{(n)}$  est la dérivée nième, ou d'ordre  $n$ , de  $f$ , on peut aussi noter  $\frac{d^n f}{dx^n}$  ou  $D^n f$ .

★ Remarques:

- $f^{(1)}$  est la dérivée première notée plutôt  $f'$  et  $f^{(2)}$  est la dérivée seconde notée plutôt  $f''$ .
- Si  $f$  est  $n$  fois dérivable sur  $I$  alors  $f$  est  $k$  fois dérivable sur  $I$  pour tout  $k \leq n$ .

★ Vocabulaire et notations : Soit  $n \in \mathbb{N}^*$

- On note  $\mathcal{D}^n(I, \mathbb{R})$  l'ensemble des fonctions  $n$  fois dérivable sur  $I$ .
- On note  $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$  l'ensemble des fonctions  $n$  fois dérivables sur  $I$  avec  $f^{(n)}$  continue sur  $I$ , de telles fonctions sont de classe  $C^n$  sur  $I$ .
- $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$  désigne l'ensemble des fonctions continues sur  $I$ .
- Si  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $f$  est  $n$  fois dérivable sur  $I$  alors  $f$  est dérivable à tout ordre ou **indéfiniment dérivable** sur  $I$ , ces fonctions sont de classe  $C^\infty$ .

Résumé sur les ensembles de fonctions :

$$\mathcal{F}(I, \mathbb{R}) \supset \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R}) \supset \mathcal{D}^1(I, \mathbb{R}) \supset \dots \supset \mathcal{D}^n(I, \mathbb{R}) \supset \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R}) \supset \dots \supset \mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R}).$$

$$\mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R}) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{C}^n(I) \quad f \in \mathcal{C}^\infty(I) \Leftrightarrow \forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, f^{(k)} \in \mathcal{C}^{n-k}(I).$$

### 3.2 Opérations sur les fonctions de classe $C^n$

**Proposition 14.3:** Soit  $f$  et  $g \in C^n(I, \mathbb{R})$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$

①  $(f + g) \in C^n(I, \mathbb{R})$  et  $(f + g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)}$  et  $(\lambda f) \in C^n(I, \mathbb{R})$  et  $(\lambda f)^{(n)} = \lambda f^{(n)}$

②  $(f \cdot g) \in C^n(I, \mathbb{R})$  et  $(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} \cdot g^{(n-k)}$  Formule de Leibniz

③ Si  $\forall x \in I, g(x) \neq 0$ ,  $(f/g) \in C^n(I, \mathbb{R})$ .

④ Soit  $f \in C^n(I, \mathbb{R})$  et  $g \in C^n(J, \mathbb{R})$  avec  $f(I) \subset J$ ,  $g \circ f \in C^n(I, \mathbb{R})$

★ Remarque: Ces théorèmes restent valables si on remplace  $C^n$  par  $C^\infty$ .

### 3.3 Classe de la bijection réciproque

**Proposition 14.4 :** Soit  $f \in C^n(I, \mathbb{R})$  avec  $n \in \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$ .

Si  $\forall x \in I, f'(x) \neq 0$  alors  $f$  réalise une bijection de  $I$  sur  $J = f(I)$  et  $f^{-1}$  est de classe  $C^n$  sur  $J$ .

★ Vocabulaire:  $f$  est de classe  $C^n$ , bijective avec  $f^{-1}$  de classe  $C^n$  est un  $C^n$ -difféomorphisme.

## 4. Fonctions convexes :

**Def:** Soit  $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ .

- $f$  est convexe sur  $I$  lorsque  $\forall x_1, x_2 \in I, \forall \lambda \in [0, 1], f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$ .
- $f$  est concave sur  $I$  lorsque  $\forall x_1, x_2 \in I, \forall \lambda \in [0, 1], f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$ .

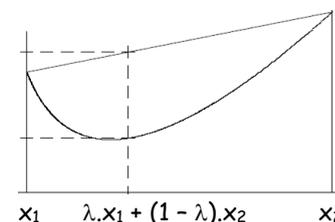
Remarques:  $f$  est concave sur  $I$  ssi  $-f$  est convexe sur  $I$ .

Interprétation graphique :

- La courbe représentative d'une fonction convexe est située en-dessous de ses cordes.
- La courbe représentative d'une fonction concave est située au-dessus de ses cordes.

$$\lambda \cdot f(x_1) + (1 - \lambda) \cdot f(x_2)$$

$$f(\lambda \cdot x_1 + (1 - \lambda) \cdot x_2)$$



☒ Exercice: Montrer que les fonctions  $x \mapsto |x|$  et  $x \mapsto x^2$  sont convexes sur  $\mathbb{R}$

**Proposition 14.5 - lemme des trois pentes:** Soit  $f$  une fonction convexe sur  $I$  et  $(a, b, c) \in I^3$

tels que  $a < c < b$ . On a  $\frac{f(c) - f(a)}{c - a} \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \frac{f(c) - f(b)}{c - b}$

☒ Exercice: Illustrer graphiquement cette propriété

**Proposition 14.6:** Soit  $f$  définie sur  $I$

- ① Si  $f$  est dérivable sur  $I$  alors ( $f$  est convexe sur  $I$  ssi  $f'$  est croissante sur  $I$ ). Dans ce cas ; la courbe représentative de  $f$  est située au-dessus de ses tangentes.
- ② Si  $f$  est deux fois dérivable sur  $I$  alors ( $f$  est convexe ssi  $f''(x) \geq 0$ )

Remarque : Ses résultats sont à adapter dans le cas où  $f$  est concave sur  $I$  en utilisant que  $-f$  est convexe sur  $I$ .

Vocabulaire : Si  $f$  est deux fois dérivable sur  $I$ , en un point  $a$  où sa dérivée seconde s'annule en changeant de signe, la courbe représentative de  $f$  change de concavité. On dira que  $(a, f(a))$  est un point d'inflexion.

☒ Inégalités de convexité à connaître :

a.  $\forall x > -1, \ln(1+x) \leq x$

b.  $\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq x + 1$

c.  $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \frac{2}{\pi}x \leq \sin x \leq x$

### 5. Brève extension aux fonctions à valeurs complexes.

Ici la notation  $|\cdot|$  désigne le module.

**Déf:** Soit  $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{C})$  et  $a \in I$ .  $f$  est dérivable en  $a$  si et seulement si  $\tau_a$  admet une limite dans  $\mathbb{C}$  en  $a$ . Si c'est le cas, on note  $f'(a)$  cette limite.

**Proposition 14.5:** Soit  $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{C})$ ,  $a \in I$ .  $f$  est dérivable en  $a$  ssi  $\operatorname{Re}(f)$  et  $\operatorname{Im}(f)$  sont dérivables en  $a$  et  $f'(a) = (\operatorname{Re}(f))'(a) + i(\operatorname{Im}(f))'(a)$ .

★ Conséquences:

- On peut étendre les règles de calcul des dérivées.
- On peut étendre la notion de dérivées successives et on note  $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{C})$  l'ensemble des fonctions de classe  $\mathcal{C}^n$  sur  $I$  à valeurs complexes.

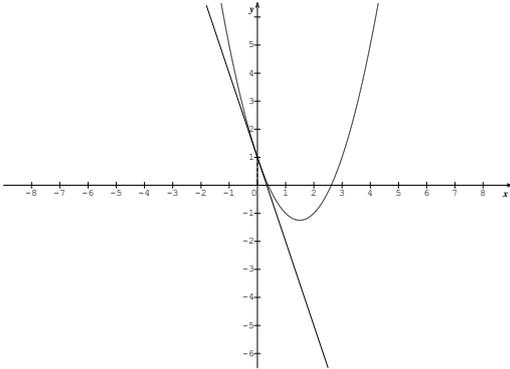
**Proposition 14.6: Inégalité des accroissements finis:** Soit  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ , continue et dérivable sur  $]a, b[$ . Si il existe un réel  $M$  tel que:  $\forall x \in ]a, b[, |f'(x)| \leq M$  alors  $|f(b) - f(a)| \leq M \cdot |b - a|$ .

Conséquence: Soit  $f: I \rightarrow \mathbb{C}$ , dérivable sur  $I$ ,  $f$  constante sur  $I$  ssi  $f' = 0$  sur  $I$

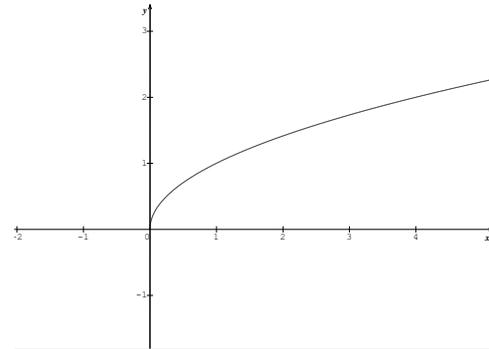
⚠ Attention: On n'a plus le théorème de Rolle, ni l'égalité des accroissements finis.

Annexe 1 : Exemples d'étude de la dérivabilité en  $a = 0$ 

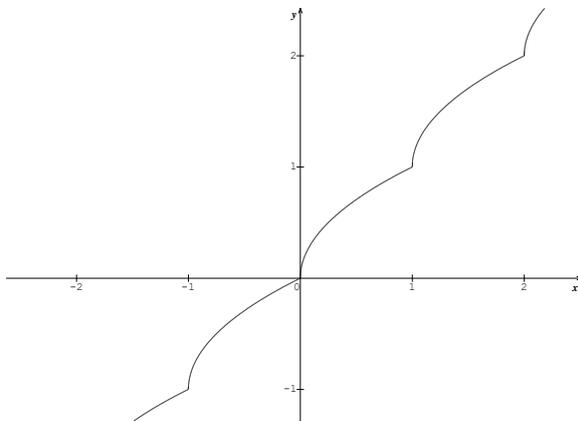
$$f : x \mapsto x^2 - 3x + 1$$



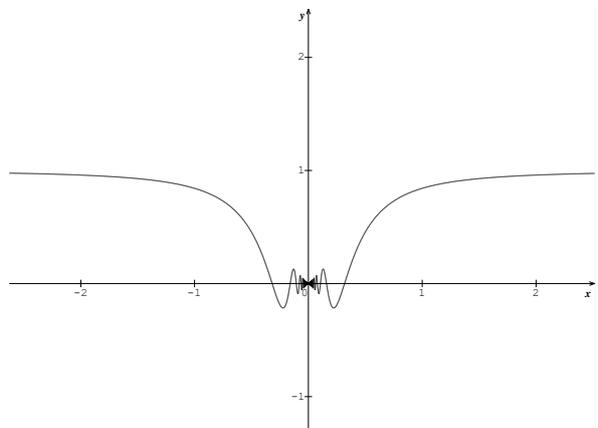
$$f : x \mapsto \sqrt{x}$$



$$f : x \mapsto \lfloor x \rfloor + \sqrt{x - \lfloor x \rfloor}$$



$$f : x \mapsto x \sin \frac{1}{x} \text{ et } f(0) = 0$$



## Annexe 2 : Dérivées successives des fonctions usuelles

$f(x)$	$f^{(n)}(x)$	commentaires
$x^\alpha$ Si $\alpha = p \in \mathbb{N}$	$\alpha(\alpha - 1)\dots(\alpha - n + 1)x^{\alpha - n}$ $\begin{cases} \frac{p!}{(p-n)!} x^{p-n} & \text{si } n \leq p \\ 0 & \text{si } n > p \end{cases}$	Par suite si $f$ une fonction polynômiale de degré $p$ alors pour tout $n \leq p$ , $f^{(n)}$ est une fonction polynômiale de degré $p - n$ et pour tout $n > p$ , $f^{(n)} = 0$ .
$e^{\alpha x}$	$\alpha^n e^{\alpha x}$	$\alpha$ est un réel ou un complexe.
$\cos(x)$	$\cos(x + n \frac{\pi}{2})$	
$\sin(x)$	$\sin(x + n \frac{\pi}{2})$	
$\frac{1}{x-a}$	$(-1)^n \frac{n!}{(x-a)^{n+1}}$	Reste valable pour $a \in \mathbb{C}$ .
$\ln x-a $	$(-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{(x-a)^n}$	$n \geq 1$
$u(ax+b)$	$a^n \cdot u^{(n)}(ax+b)$	Avec $u$ de classe $C^n$

Les six premières fonctions sont de classe  $C^\infty$  sur les intervalles où elles sont définies

Annexe 3 : Deux démonstrations de la proposition 14.1 donnant la dérivabilité de  $g \circ f$ .

On suppose que  $f$  est dérivable sur  $I$ ,  $g$  est dérivable sur  $J$  avec  $f(I) \subset J$ .

Pour tout réel  $a$  de  $I$ , on a  $f$  dérivable en  $a$ , puisque  $a \in I$ , et  $g$  dérivable en  $b = f(a)$  puisque  $b \in f(I)$  donc  $b \in J$ . On va démontrer que  $h = g \circ f$  est dérivable en  $a$  avec  $h'(a) = f'(a) \times g'(f(a))$ .

Méthode 1 : A l'aide des taux d'accroissement.

- Soit  $x \in I$ ,  $x \neq a$ . deux cas sont à envisager :

1<sup>er</sup> cas :  $f(x) \neq f(a)$ .

$$\text{Dans ce cas, } \tau_{h,a}(x) = \frac{h(x) - h(a)}{x - a} = \frac{g(f(x)) - g(f(a))}{x - a} = \frac{g(f(x)) - g(f(a))}{f(x) - f(a)} \times \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

$$\text{On pose } y = g(x), \text{ on a } \tau_{h,a}(x) = \frac{g(y) - g(b)}{y - b} \times \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \tau_{g,b}(y) \times \tau_{f,a}(x)$$

2<sup>ème</sup> cas : Si  $f(x) = f(a)$

$$\text{dans ce cas, } \tau_{h,a}(x) = \frac{h(x) - h(a)}{x - a} = \frac{g(f(x)) - g(f(a))}{x - a} = 0 \text{ et } \tau_{f,a}(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = 0 \text{ donc l'égalité}$$

$$\tau_{h,a}(x) = \tau_{g,b}(y) \times \tau_{f,a}(x) \text{ reste vraie.}$$

**Bilan :**  $\forall x \in I \setminus \{a\}, \tau_{h,a}(x) = \tau_{g,b}(y) \times \tau_{f,a}(x)$  avec  $y = f(x)$  et  $b = f(a)$ .

• Comme  $f$  est dérivable en  $a$ , on a  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \tau_{f,a}(x) = f'(a)$ .

Comme  $f$  est dérivable en  $a$ ,  $f$  est également continue en  $a$  donc quand  $x \rightarrow a$ ,  $y = f(x) \rightarrow b$  donc

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(f(x)) - g(f(a))}{f(x) - f(a)} = \lim_{y \rightarrow b} \frac{g(y) - g(b)}{y - b} = \lim_{y \rightarrow b} \tau_{g,b}(y).$$

Or  $g$  est dérivable en  $b$  donc  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(f(x)) - g(f(a))}{f(x) - f(a)} = g'(b) = g'(f(a))$ .

Ainsi par produit des limites, on a  $\lim_{x \rightarrow a} \tau_{h,a} = f'(a) \times g'(f(a))$ .

On a donc, par définition :  $g \circ f$  est dérivable en tout réel  $a$  de  $I$  et  $h'(a) = g'(a) \times g'(f(a))$ .

### Méthode 2 : A l'aide du développement limité d'ordre 1 (Théorème 14.1) :

$f$  est dérivable en  $a$  donc il existe  $\varepsilon_1 : I \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $\lim_{x \rightarrow a} \varepsilon_1(x) = 0$  et

$$\forall x \in I, f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + (x-a)\varepsilon_1(x).$$

$f$  est dérivable en  $b = f(a)$  donc il existe  $\varepsilon_2 : J \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $\lim_{y \rightarrow b} \varepsilon_2(y) = 0$  et

$$\forall y \in J, g(y) = g(b) + (y-b)g'(b) + (y-b)\varepsilon_2(y). (\spadesuit)$$

Or  $\forall x \in I, f(x) \in J$ , donc on peut poser  $y = f(x)$  dans  $(\spadesuit)$  :

$$\forall x \in I, g(f(x)) = g(f(a)) + (f(x) - f(a))g'(f(a)) + (f(x) - f(a))\varepsilon_2(f(x)).$$

D'après  $(\spadesuit)$ ,  $\forall x \in I, f(x) - f(a) = (x-a)(f'(a) + \varepsilon_1(x))$

$$\begin{aligned} \text{D'où } \forall x \in I, g(f(x)) &= g(f(a)) + (x-a)(f'(a) + \varepsilon_1(x))g'(f(a)) + (x-a)(f'(a) + \varepsilon_1(x))\varepsilon_2(f(x)). \\ &= g(f(a)) + (x-a)f'(a)g'(f(a)) + (x-a)[\varepsilon_1(x)g'(f(a)) + (f'(a) + \varepsilon_1(x))\varepsilon_2(f(x))] \end{aligned}$$

Posons  $\varepsilon(x) = \varepsilon_1(x)g'(f(a)) + (f'(a) + \varepsilon_1(x))\varepsilon_2(f(x))$ .  $\varepsilon$  est définie sur  $I$ , étudions sa limite en  $a$  :

Par hypothèse:  $\lim_{x \rightarrow a} \varepsilon_1(x) = 0$

De plus  $f$  est dérivable en  $a$  donc continue en  $a$ , par suite  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) = b$  et donc

$$\lim_{x \rightarrow a} \varepsilon_2(f(x)) = \lim_{y \rightarrow b} \varepsilon_2(y) = 0.$$

On en déduit que  $\lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0$ .

D'après le théorème 14.1,  $g \circ f$  est dérivable en  $a$  et  $(g \circ f)'(a) = f'(a) \times g'(f(a))$

**Conclusion :  $g \circ f$  est dérivable sur  $I$  et  $(g \circ f)' = f' \times g' \circ f$ .**