Chapitre 14 Complément de cours : Méthode pratiques pour l'étude d'une suite récurrente d'ordre 1

Soit une fonction définie sur un domaine D de $\mathbb{R}$. La suite (u_n) définie par:
$u_0 \in D$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$ est une suite récurrente d'ordre 1 associée à la fonction f.

On a $u_1 = f(u_0)$, $u_2 = f(u_1) = f \circ f(u_0)$ etc… $u_n = \underbrace{\left(f \circ f \circ \cdots \circ f\right)}_{n \text{ fois}}(u_0)$

Cette fiche rassemble des résultats généraux, **qui doivent être redémontrés en s'adaptant à l'exercice proposé**

---

1. Problème d'existence, notion d'intervalle stable :

La suite (u_n) est bien définie lorsque tous ses termes existent. Ceci est réalisé ssi $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in D$.

Lorsque $D = \mathbb{R}$, la suite u est toujours bien définie.

Def: Soit I un intervalle contenu dans D. On dit que I est stable par f lorsque $f(I) \subset I$ c'est à dire $\forall x \in I$, $f(x) \in I$.

C'est le cas lorsque $f : I \to I$

Résultat 1: Soit I stable par f et u une suite associée à f, si $u_0 \in I$ alors $\forall n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n \in I$.

Démonstration par récurrence.

✍ **Exercice 1**: Soit u la suite définie par $u_0 \geq 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n}$

On note f la fonction définie sur $[-1, +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{1 + x}$

Montrer que $I = [0, +\infty[$ est stable par f en déduire que (u_n) est bien définie et que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 0$

2. Suite associée à une fonction monotone:

Lorsque $f : I \to I$ est monotone, on peut en déduire des informations sur la monotonie de (u_n)

Résultat 2: Soit I un intervalle stable par f et (u_n) une suite associée à f avec $u_0 \in I$.
① Si f est croissante sur I alors (u_n) est monotone et plus précisément:
Si $u_0 \leq u_1$ alors u est croissante.
Si $u_0 \geq u_1$ alors u est décroissante.
② Si f est décroissante sur I alors les deux sous-suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones et de monotonie contraire.

Démonstration par récurrence

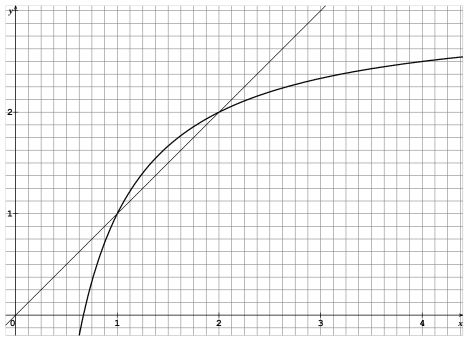
Dans la pratique: Il n'est pas toujours facile, ni possible de trouver des intervalles stables sur lequel f est monotone. Pour une méthode plus générale, revenons à la définition: Il s'agit de déterminer le signe de $u_{n+1}-u_n = f(u_n) - u_n$

On peut alors s'intéresser à la fonction $g:x\to f(x) - x$.
Si la suite prend ces valeurs dans I et si g garde un signe constant sur I alors la suite est monotone et son sens de variation est donné par le signe de g(x)

Exercice 2 : Soit u la suite définie par $u_0 \geq 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 3 - \dfrac{2}{u_n}$

On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par

$f(x) = 3 - \dfrac{2}{x}$



a. Montrer que I = [1, +∞[est stable par f et en déduire que u est bien définie.
b. Déterminer les points fixes de f et le signe de f(x) – x sur I.
c. Donner le sens de variation de u en fonction de la valeur de u_0.
d. Etudier la convergence de u.

3. Limite et point fixe :

Def : Soit $a \in D$, on dit que a est un point fixe de f ssi f(a) = a c'est à dire a est solution de f(x) = x sur D.

Interprétation géométrique : Les points fixes de f sur I, si ils existent, sont les abscisses des points d'intersection de la courbe représentant f sur I et de la droite (y = x).

Résultat 3: Soit I un intervalle stable par f et (u_n) une suite associée à f avec $u_0 \in I$.
Si $u_n \to \ell$ avec $\ell \in I$ et si f est continue en ℓ alors $f(\ell) = \ell$

Démonstration:

Dans la pratique: Avec les mêmes hypothèses, si I est un intervalle fermé et si f est continue sur I alors $\ell \in I$ et $\ell = f(\ell)$.

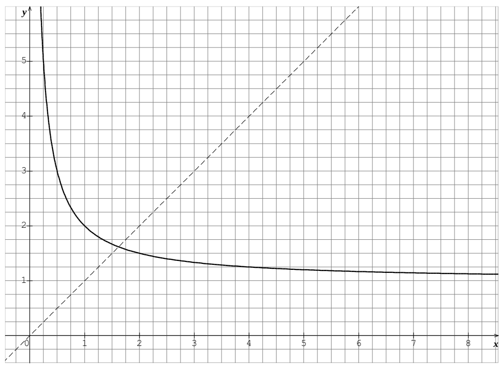
Attention: La recherche des points fixes de f par la résolution de l'équation f(x) = x fournit les seules limites (finies) possibles pour la suite u, mais la suite peut très bien ne pas converger même si f admet des points fixes et même si elle n'en admet qu'un seul.

Remarque: Dans le cas où $f : I \to I$ est décroissante sur I, pour démontrer que u converge il faudra démontrer que les deux sous suite convergent vers la même limite. Attention, les limites possibles de (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont les points fixes de $g = f \circ f$.

Exercice 3 : Soit u la suite définie par $u_0 = 4$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{u_n}$

On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = 1 + \dfrac{1}{x}$ et $g = f \circ f$

a. Etudier la fonction f sur $\mathbb{R}^*_+$ et justifier que u est bien définie.
b. u est-elle monotone ?
c. Donner le tableau de variation de g sur $\mathbb{R}^*_+$ et ses éventuels points fixes.
d. Etudier la convergence des suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}).



4. Cas où f est contractante :

Def: On dit que f est **contractante** sur I ssi f est k-lipschitzienne sur I avec $0 \leq k < 1$,
C'est-à-dire : $\forall (x,y) \in I^2$, $|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$

Dans la pratique: On utilise le plus souvent l'inégalité des accroissements finis pour établir que f est contractante sur I : il suffit de majorer $|f'(x)|$ sur I par $k < 1$.

Résultat 4: Soit I un intervalle stable par f et α un point fixe de f sur I.
Si f est k-contractante sur I alors toute suite associée à f avec $u_0 \in I$ converge vers α et de plus:
$\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \alpha| \leq k^n |u_0 - \alpha|$.

Démonstration par récurrence.

Remarque: la suite u est une suite de valeurs approchées du point fixe. L'erreur commise est contrôlée par l'inégalité par $|u_n - \alpha| \leq k^n |u_0 - \alpha|$. La convergence de la suite est d'autant plus rapide que k est petit.

✍ **Exercice 4**: Montrer que la fonction $f : x \mapsto 1 - \frac{x^2}{4}$ est contractante sur[0, 1], puis étudier la convergence de la suite définie par $u_0 \in [0, 1]$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 1 - \frac{u_n^2}{4}$