

## Programme de colles-semaine 19 - 03/03 au 07/03

---

### I. Dérivabilité d'une fonction numérique.

- Dérivées successives, fonctions de classe  $C^n$ , de classe  $C^\infty$ . Opérations sur les fonctions de classe  $C^n$ , de classe  $C^\infty$ , formule de Leibniz, dérivées successives des fonctions usuelles.
- Si  $f$  est de classe  $C^n$  sur  $I$  et telle que  $f'(x) \neq 0$  sur  $I$  alors  $f$  induit une bijection de  $I$  sur  $f(I)$  et  $f^{-1}$  est de classe  $C^n$  sur  $f(I)$ .
- Fonctions convexes, lemme des trois pentes, caractérisation de la convexité pour une fonction dérivable, deux fois dérivable, inégalités classiques :

$$\forall x > -1, \ln(1+x) \leq x \qquad \forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq x+1 \qquad \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \frac{2}{\pi}x \leq \sin x \leq x$$

- Brève extension aux fonctions à valeurs complexes, utilisation dans le calcul des dérivées nièmes, par exemple, cosinus et sinus
- Application à l'étude de suites récurrente.

### II. Espaces vectoriels

- Définition et vocabulaire: vecteurs, scalaires, famille de vecteurs, vecteurs colinéaires, combinaisons linéaires, règles de calcul.
- Exemples de référence: vecteurs du plan et de l'espace,  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{C}$ ,  $\mathbb{R}^2$ ,  $\mathbb{R}^3$ ,  $\mathbb{R}^n$ ,  $\mathfrak{F}(X,E)$  où  $X$  est non vide et  $E$  est un espace vectoriel,  $\mathbb{R}^n$ ,  $\mathbb{C}^n$ ,  $\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$
- Sous-espace vectoriel (SEV): définition et caractérisation, exemples.
- L'intersection de deux SEV est un SEV, sous-espace vectoriel engendré par une famille finie de vecteurs.
- Somme de deux SEV,  $F + G$  est le plus petit SEV contenant  $F \cup G$ , somme directe, sous-espaces supplémentaires, caractérisation.

Exemples à connaître : Les fonctions paires et les fonctions impaires dans  $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ , les matrices symétriques et antisymétriques des  $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ , sont des SEV supplémentaires.

---

### Déroulement de la colle:

#### ① Calcul d'une dérivée nième

Formule de Leibniz, récurrence, linéarisation....

#### ② Question de cours

- Définition d'une fonction convexe à illustrer graphiquement, Donner les trois inégalités de convexité à connaître et savoir les justifier.
- Montrer que l'intersection de deux SEV est un SEV
- Donner la définition de  $\text{vect}(e_1, \dots, e_n)$  est montrer que c'est un SEV de  $E$
- Définition et caractérisation de deux SEV supplémentaires et traiter un exemple

③ Exercices au choix du colleur parmi les thèmes suivants: fonctions de classe  $C^n$ , étude de suite récurrentes, SEV, SEV supplémentaires.