Programme de colles-semaine 21 - 17/03 au 21/03

I. Espaces vectoriels

- Définition et vocabulaire: vecteurs, scalaires, famille de vecteurs, vecteurs colinéaires, combinaisons linéaires, règles de calcul.
- Exemples de référence: vecteurs du plan et de l'espace, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$,$\mathbb{R}^n$, $\mathcal{F}(X,E)$ où X est non vide et E est un espace vectoriel, $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$
- Sous-espace vectoriel (SEV): définition et caractérisation, exemples.
- L'intersection de deux SEV est un SEV, sous-espace vectoriel engendré par une famille finie de vecteurs.
- Somme de deux SEV, F + G est le plus petit SEV contenant FUG, somme directe, sous-espaces supplémentaires, caractérisation.

Exemples à connaître : Les fonctions paires et les fonctions impaires dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, les matrices symétriques et antisymétriques des $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, sont des SEV supplémentaires.

- Familles génératrices: définition, exemples, propriétés.
- Familles libres, liées: Définition, exemple, caractérisation d'une famille liée par un des vecteurs est CL des autres.
- Bases: Définition, exemples, caractérisation par l'existence et l'unicité de la décomposition dans la base, coordonnées d'un vecteur dans une base, base adaptée à une somme directe.
- Espace vectoriel de dimension finie : définition, exemples, théorème de la base extraite et de la base incomplète, existence de base en dimension finie.
- Cardinal d'une famille libre en dimension n, théorème de la dimension, familles libres et familles génératrice dans un espace de dimension n, exemples de référence, espace produit.
- Sous-espaces vectoriels en dimension finie, dimension d'une sev, existence d'un supplémentaire, formule de Grassmann, caractérisation des supplémentaires en dimension finie.
- Rang d'une famille de vecteur, cas des familles libres et des familles génératrices.

II. Polynômes.

- Définition, degré, vocabulaire
- Somme et multiplication par un scalaire, dégré de P + Q et de λP.
- Produit de deux polynômes, définition et deg(PQ) = deg(P) + deg(Q).
- Ecriture formelle, règles de calcul : associativité, élément neutre, commutativité, loi intègre, distributivité, binôme, Bernoulli.
- Fonction polynomiale associée, évaluation en un scalaire, polynôme de matrice
- Composition de deux polynômes, exemples usuels.
- ($\mathbb{K}[X]$, +, .) est un K-EV de dimension infinie, toute famille de polynômes non nuls échelonnée en degré est libre dans $\mathbb{K}[X]$. Les polynômes de degré au plus n forme un SEV de $\mathbb{K}[X]$ de dimension (n + 1) noté $\mathbb{K}_n[X]$ et sa base canonique est $(1, X, X^2, \dots, X^n)$
- Arithmétique dans $\mathbb{K}[X]$: divisibilité, théorème de division euclidienne, algorithme et justification.
- Dérivation: polynôme dérivé, propriétés de calcul,

Déroulement de la colle:

① Une question de cours parmi les suivantes

- Enoncé et preuve de la formule de Grassmann.
- Preuve de toute famille de polynômes non nuls échelonnée en degré est libre dans $\mathbb{K}[X]$.
- Définition de la division euclidienne de polynômes et preuve de l'unicité.

② Exercices au choix des colleurs : Algèbre linéaire et polynômes.
Pas encore de dérivations successives ni de racines.

Prévisions : Polynômes