Programme de colles-semaine 22 - 24/03 au 29/03

I. Polynômes.

- Définition, degré, vocabulaire
- Somme et multiplication par un scalaire, dégré de P + Q et de λP.
- Produit de deux polynômes, définition et deg(PQ) = deg(P) + deg(Q).
- Ecriture formelle, règles de calcul : associativité, élément neutre, commutativité, loi intègre, distributivité, binôme, Bernoulli.
- Fonction polynomiale associée, évaluation en un scalaire, polynôme de matrice
- Composition de deux polynômes, exemples usuels.
- ($\mathbb{K}[X]$, +, .) est un K-EV de dimension infinie, toute famille de polynômes non nuls échelonnée en degré est libre dans $\mathbb{K}[X]$. Les polynômes de degré au plus n forme un SEV de $\mathbb{K}[X]$ de dimension (n + 1) noté $\mathbb{K}_n[X]$ et sa base canonique est $(1, X, X^2, \ldots, X^n)$
- Arithmétique dans $\mathbb{K}[X]$: divisibilité, théorème de division euclidienne, algorithme et justification.
- Dérivation: polynôme dérivé, propriétés de calcul, dérivation successive, formule de Leibniz, formule de Taylor. Application $(1, (X-a), \ldots, (X-a)^n)$ base de $\mathbb{K}_n[X]$ et division euclidienne de P par $(X-a)^k$.
- Racines d'un polynôme : définition et caractérisation : α racine de P ssi $(X-\alpha)$ divise P.

Généralisation à k racines distinctes. Conséquences:
  - Si P est de degré n alors P possède au plus n racines distinctes.
  - Si P de degré n a (n+1) racines distinctes alors P = 0.
  - Si P possède une infinité de racines alors P = 0.
- Ordre de multiplicité d'une racine : α est racine de P d'ordre de multiplicité m lorsque il existe un polynôme Q tel que $P = (X-\alpha)^m Q$ et $Q(\alpha) \neq 0$

Caractérisation: a racine de P d'ordre m ssi $P(\alpha) = P'(\alpha) = \ldots = P^{(m-1)}(\alpha) = 0$ et $P^{(m)}(\alpha) \neq 0$.
Conséquence: P de degré n a au plus n racines comptées avec leur ordre de multiplicité.
- Polynômes irréductibles dans $\mathbb{K}[X]$, Théorème de d'Alembert-Gauss, polynômes irréductibles et factorisation dans $\mathbb{C}[X]$, dans $\mathbb{R}[X]$, cas de $X^n - 1$.

Déroulement de la colle:

① Une question de cours parmi les suivantes

- Déterminer le reste dans une division euclidienne de polynômes
  Par exemple : Reste de X^n dans la division par $B = X(X - 1)^2$
- Preuve de toute famille de polynômes non nuls échelonnée en degré est libre dans $\mathbb{K}[X]$.
- Enoncé et preuve de la formule de Taylor
- Factorisation de $X^n - 1$ dans $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$

③ Exercices sur les polynômes
Les exercices peuvent utiliser des outils d'analyse ou d'algèbre linéaire.

Prévisions : Polynômes, comparaison, DL