Programme de colles-semaine 24 - 07/04 au 11/04

I. Polynômes.

• Décomposition d'une fraction rationnelle dont le dénominateur est scindé à racines simples
Seul cas au programme.

II. Analyse asymptotique

• Domination et négligeabilité en a, caractérisation par le quotient, propriétés, compatibilité avec les opérations, comparaison des fonctions usuelles.
• Fonctions équivalentes en a, caractérisation par le quotient, propriétés, équivalents usuels, règles de calcul : produit, exponentiation, quotient, substitution, exemples de recherche d'un équivalent simple pour une somme.
• Propriétés conservées par équivalents : recherche de limite en a et signe au voisinage de a.
• Définition de f admet un DL d'ordre n en 0, exemple fondamental : $\frac{1}{1-x} \underset{x\to 0}{=} 1+x+x^2+..+x^n+o\ (x^n)$,
unicité, troncature, substitution, parité, $DL_n(0)$ de $\frac{1}{1+x}$ et $DL_{2n}(0)$ de $\frac{1}{1+x^2}$.
• Définition de f admet un DL d'ordre n en a. On se ramène systématiquement à un $DL_n(0)$ en posant x = a +h.
• Soit f définie au voisinage de a, f est continue en a ou prolongeable par continuité en a ssi f admet un $DL_0(a)$ et f (ou f prolongée) est dérivable en a ssi f admet un $DL_1(a)$.
• Formule de Taylor-Young (admis ici), DL à tout ordre en 0 de exp, cos, sin et $(1+x)^\alpha$, cas particulier usuels : $DL_3(0)$ de $\sqrt{1+x}$ et $\frac{1}{\sqrt{1+x}}$ en 0.
•·Combinaison linaire et produit de DL, DL en 0 de ch et sh.
• Composition de $DL_n(0)$, application au DL de l'inverse d'une fonction admettant un $DL_n(0)$ avec $a_0\neq 0$, $DL_5(0)$ de tan.
• Intégration, $DL_n(0)$ de ln(1 + x) et arctan(x).
• Utilisation des DL pour la recherche d'un équivalent simple, pour le calcul d'une limite, pour une étude locale, pour une étude de branches infinies.

Déroulement de la colle:

① Une question de cours parmi les suivantes

- Définition et caractérisations des relations de comparaison o et 0
- Equivalents usuels en 0.
- Enoncer la formule de Taylor-Young avec toutes ses hypothèses et l'appliquer pour obtenir le $DL_3(0)$ de $\sqrt{1+x}$ ou de $\frac{1}{\sqrt{1+x}}$
- Donner rapidement le $DL_5(0)$ de tan(x) par la méthode de son choix.

② Un calcul de DL d'ordre 3 ou 4
Ce sera l'occasion de vérifier la bonne connaissance des DL usuels au verso.
Rappel : Interro de cours le avril

③ Exercice au choix du colleur *qui pourra être le calcul d'une primitive, d'une somme ou d'une dérivée nième nécessitant la décomposition d'une fraction rationnelle dont le dénominateur est scindé à racines simples*

♥ DL usuels à connaître

$$\frac{1}{1-x} \underset{0}{=} 1+x+x^2+..+x^n+o(x^n)$$

$$\frac{1}{1+x} \underset{0}{=} 1-x+x^2+...+(-1)^n x^n+o(x^n)$$

$$\frac{1}{1+x^2} \underset{0}{=} 1-x^2+x^4+...+(-1)^n x^{2n}+o(x^{2n+1})$$

$$e^x \underset{0}{=} 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+...+\frac{x^n}{n!}+o(x^n)$$

$$ch(x) \underset{0}{=} 1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+...+\frac{x^{2n}}{(2n)!}+o(x^{2n+1})$$

$$sh(x) \underset{0}{=} x+\frac{x^3}{3!}+...+\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+o(x^{2n+2})$$

$$\cos(x) \underset{0}{=} 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+...+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+o(x^{2n+1})$$

$$\sin(x) \underset{0}{=} x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+...+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+o(x^{2n+2})$$

$$\tan(x) \underset{0}{=} x+\frac{x^3}{3}+\frac{2}{15}x^5+o(x^5)$$

$$(1+x)^\alpha \underset{0}{=} 1+\frac{\alpha}{1!}x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+...+\frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!}x^n+o(x^n) \text{ avec } \alpha\in\mathbb{R}$$

$$\sqrt{1+x} \underset{x\to 0}{=} 1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3+o(x^3)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} \underset{x\to 0}{=} 1-\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}x^2-\frac{5}{16}x^3+o(x^3)$$

$$\ln(1+x) \underset{0}{=} x-\frac{x^2}{2}+...+(1-)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}+o(x^{n+1})$$

$$\ln(1-x) \underset{0}{=} -x-\frac{x^2}{2}-...-\frac{x^{n+1}}{n+1}+o(x^{n+1})$$

$$\arctan(x) \underset{0}{=} x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+...+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+o(x^{2n+2})$$