Programme de colles-semaine 26 - 05/05 au 09/05
Les colles du 8 mai seront rattrapées

I. Analyse asymptotique

II. Applications linéaires

- Applications linéaires: définition et exemples, règle de calcul.
- L'image d'un SEV par une application linéaire est un SEV, f(E) est un sev de F noté Imf.

f surjective ssi Imf = F. Si E = Vet(e_1, e_2, …, e_n) alors Im f = Vect(f(e_1), f(e_2), …, f(e_n))
- L'image réciproque d'un SEV par une application linéaire est un SEV Noyau d'une application linéaire, Kerf est un SEV de E, f est injective ssi Kerf = {0E}.
- Opérations sur les applications linéaires : L'ensemble des applications, noté L(E,F) est un K-EV.

Composition d'application linéaire. Kerf $\subset$ Ker g$\circ$f, Im g $\subset$ Im g$\circ$f et [g$\circ$f = 0 $\Leftrightarrow$ Im f $\subset$ Ker g].
- Endomorphismes, isomorphismes, automorphismeS, définition et exemples.

Composée d'endomorphismes, notation f^n pour f itérée n fois.
Formule du binôme et de Bernoulli pour des endomorphismes qui commutent.
- Cas particuliers d'endomorphismes de E: homothéties, projections et symétrie
  - ★ Projecteurs: f$\in\mathcal{L}$(E) est un projecteur lorsque f$\circ$f = f.
    Si p est un projecteur de E alors E = Kerp $\oplus$ Imp et p est le projection sur Imp parallèlement à Kerp.
  - ★Symétrie: f$\in\mathcal{L}$(E) est une involution lorsque fof=I_d.
    Si f est une involution de E alors E = Ker(f-Id)$\oplus$Ker(f+Id) et f est la symétrie par rapport à Ker(f-Id) parallèlement à Ker(f+Id).

- Image d'une famille génératrice, d'une famille liée, si f est injective alors l'image d'une famille libre dans E est libre dans F.
- Image d'une base $\mathcal{B}$: f est injective ssi f($\mathcal{B}$) est libre dans F, f est bijective ssi f($\mathcal{B}$) est une base de E

Si E a pour base B toute application linéaire u de E dans F est entièrement déterminée par l'image de B
- Espaces vectoriels isomorphes : cas de la dimension finie.
- Rang d'une application linéaire, lemme du rang et théorème du rang. Conséquence : caractérisation des applications injectives, surjectives et bijectives en dimension finie.
- Rang d'une composée
- Hyperplan défini comme le noyau d'une forme linéaire non nulle.

En dimension finie H est un hyperplan ssi dim H = n – 1

Déroulement de la colle:

① Etude locale (en a ou en $\pm\infty$) d'une fonction à l'aide d'un DL de petit ordre.

② Une question de cours parmi les suivantes

- Donner la définition d'une projecteur de E et monter que si p est un projecteur de E alors E = Kerp $\oplus$ Imp
- Soit f$\in\mathcal{L}$(E,F) et $\mathcal{B}$ une base de E. Montrer que f est injective ssi f($\mathcal{B}$) est libre dans E.
- Enoncé et preuve du lemme du rang : Soit f$\in\mathcal{L}$(E, F) et H un supplémentaire de Ker f dans E.

L'application $\varphi:\begin{cases} H \to \mathrm{Im} f \\ \vec{x} \mapsto f(\vec{x}) \end{cases}$ est un isomorphisme.

③ Exercices d'algèbre linéaire

Prévisions : Représentations matricielles