Chapitre 16 - Polynômes - résumé

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1. L'ensemble $\mathbb{K}[X]$.

1.1. Définition et écriture formelle des polynômes à coefficient dans $\mathbb{K}$

Définitions:
- On appelle polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$, toute suite $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{K}$, nulle à partir d'un certain rang.
- Deux polynômes $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sont égaux s'ils sont définis par la même suite de coefficients :$\forall k\in\mathbb{N}$, $a_k = b_k$
- On appelle polynôme nul le polynôme dont tous les coefficients sont nuls.
- On appelle degré d'un polynôme $A = (a_k)_{k\in\mathbb{N}}$,non nul, le plus grand entier n tel que $a_n \neq 0$.

On note : $\deg(A) = n$.
- Le coefficient a_n correspondant au degré est appelé coefficient dominant du polynôme A.

On note : $\mathrm{cdom}(A) = a_n$.
- Si le coefficient dominant d'un polynôme est 1, on dit que le polynôme est unitaire.
- Les polynômes de degré 0 et le polynôme nul sont dits constants.

Notation: L'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathbb{K}[X]$.

Conventions:
Si P = 0, $\deg(P) = -\infty$.
$\forall n\in\mathbb{N}$, $-\infty < n$, $(-\infty) + n = n + (-\infty) = -\infty$ et $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$.

Ecriture formelle : Soit $P = (a_n)$ un polynôme de $\mathbb{K}[X]$, P s'écrit de manière formelle sous la forme $P = \sum_{k\in\mathbb{N}} a_k X^k$. Si $P \neq 0$, en posant $\deg(P) = n$, on a plus précisément $\boxed{P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \text{ avec } a_n \neq 0}$

Attention : il faut bien garder à l'esprit que X n'est ni un scalaire ni une inconnue : c'est un polynôme dont les coefficients vérifient $\forall k\in\mathbb{N}$, $a_k = \delta_{1,k}$

Cas particulier : Lorsque P est de degré 0, il est constant et on note $P = a_0$ plutôt que $P = a_0X^0$

1.2 Addition et multiplication par un scalaire.

Proposition 16.1 et définition : Soit $P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k X^k$ deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$

① $P + Q = \sum_{k=0}^{+\infty} (a_k + b_k) X^k$ est un polynôme de $\mathbb{K}[X]$.

② $\deg(P+Q) \leq \max(\deg(P, Q))$ et si $\deg(P) \neq \deg(Q)$ alors $\deg(P+Q) = \max(\deg(P, Q))$

Dans la pratique: lorsque $\deg(P) = \deg(Q) = n$, on a $\deg(P + Q) \leq n$ et pour déterminer le degré il faut calculer $a_n + b_n$

Proposition 16.2 et définition : Soit $P = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ et $\lambda\in\mathbb{K}$.

① $\lambda P = \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda a_k X^k$ est un polynôme de $\mathbb{K}[X]$

② $\deg(\lambda P) = \deg(P)$ si $\lambda \neq 0$ et $\deg(\lambda P) = -\infty$ si $\lambda = 0$

1.3 Produit de deux polynômes:

Proposition 16.3 et définition: Soit P = $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$ et Q = $\sum_{k=0}^{+\infty} b_k X^k$ deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$.

PQ = $\sum_{k=0}^{+\infty} c_k X^k$ avec $\forall k \in \mathbb{N}$, $c_k = \sum_{i+j=k} a_i\, b_j = \sum_{i=0}^{k} a_i\, b_{k-i} = \sum_{j=0}^{k} a_{k-j} b_j$ est un polynôme de $\mathbb{K}[X]$.

On a:

① deg(PQ) = deg(P) + deg(P)

② cdom(PQ) = cdom(P)×cdom(Q)

③ La règle du produit nul est vraie dans $\mathbb{K}[X]$: PQ = 0 ⇔ P = 0 ou Q = 0

Le produit de deux polynômes est une loi intègre.

Exercice : Montrer avec la définition que si P = X et Q = X^n alors PQ = X^{n+1}

Dans la pratique : Avec l'écriture formelle les calculs s'effectuent naturellement en utilisant les règles sur les opérations dans $\mathbb{K}$.

1.4 Calculs dans $\mathbb{K}[X]$

Proposition 16.4

① Le produit est une loi interne à $\mathbb{K}[X]$, qui est associative, commutative et qui possède un élément neutre : le polynôme constant $X^0 = 1$.

② Le produit de deux polynômes est distributif sur l'addition et compatible avec le produit externe. on pourra donc peut appliquer les **formules du binôme et de Bernoulli :**

$\forall P, Q \in \mathbb{K}[X]$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $(P+Q)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P^k Q^{n-k}$ et $P^n - Q^n = (P-Q)\sum_{k=0}^{n-1} P^k Q^{n-1-k}$

1.5 Fonctions polynomiales

Définition: Soit P = $\sum_{k\in\mathbb{N}} a_k X^k$, la fonction polynomiale associée à P est $\tilde{P} : \begin{cases} \mathbb{K} \to \mathbb{K} \\ x \mapsto \sum_{k\in\mathbb{N}} a_k x^k \end{cases}$

On note $\mathbb{K}(x)$ l'ensemble des fonctions polynômiales à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Proposition 16.5: L'application $\varphi : \begin{cases} \mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}(x) \\ P \mapsto \tilde{P} \end{cases}$ est une bijection.

Dans la pratique : On identifie le plus souvent P et $\tilde{P}$, c'est-à-dire qu'on note P la fonction polynomiale associée.

Conséquence: Evaluation en a

Si a $\in \mathbb{K}$, on note P(a) le réel $\tilde{P}$ (a). On dit qu'on évalue P en a.

En particulier si P = $\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ alors P(0) = a_0.

Dans la pratique : On pourra substituer un scalaire à l'indéterminée mais aussi un objet dont on sait calculer des puissances et des combinaisons linéaires. Par exemple, une matrice carrée :

soit P = $\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,

P(A) = $\sum_{k=0}^{n} a_k A^k = a_0 I_n + a_1 A + \cdots + a_n A^n$ est une matrice carrée d'ordre n.

1.6 Composition de deux polynômes:

Définition: Soit P = $\sum_{k\in\mathbb{N}} a_k X^k$ et Q = $\sum_{i\in\mathbb{N}} b_i X^i$ deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$.

Le polynôme composé PoQ est le polynôme associé à la fonction polynômiale $\tilde{P}\circ\tilde{Q}$

ou encore : PoQ = P(Q) = $\sum_{k\in\mathbb{N}} a_k Q^k = \sum_{k\in\mathbb{N}} a_k \left(\sum_{i\in\mathbb{N}} b_i X^i\right)^k$

Dans la pratique: On substitue à X le polynôme Q : Soit P = $\sum_{k\in\mathbb{N}} a_k X^k$

P(X+1) = $\sum_{k\in\mathbb{N}} a_k (X+1)^k$, P(X²) = $\sum_{k\in\mathbb{N}} a_k X^{2k}$, P(-X) = $\sum_{k\in\mathbb{N}} a_k (-1)^k X^k$

Proposition 16.6 : Si P et Q sont deux polynômes non nuls, alors deg(PoQ) = deg(P)deg(Q).

Remarques:

★ Si Q = X, PoQ = P(X) = $\sum_{k\in\mathbb{N}} a_k X^k$ est une autre écriture du polynôme P.

★ Pour éviter les ambiguïtés, on écrira (X+1)P pour le produit et P(X+1) pour la composée.

---

2. Algèbre linéaire dans $\mathbb{K}[X]$

Théorème 16.1: ($\mathbb{K}[X]$, + , .) est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension infinie.

Remarque: Le vecteur nul de $\mathbb{K}[X]$ est le polynôme nul.

Définition: Soit $\mathcal{F} = (P_1, P_2, ...P_n)$ une famille de polynômes de $\mathbb{K}[X]$.

On dit que $\mathcal{F}$ est une famille échelonnée en degré ou encore à degrés échelonnés lorsque $\forall k\in[\![1, n-1]\!]$, $\deg(P_k) < \deg(P_{k+1})$ ou encore $\deg(P_1) < \deg(P_2) < \dots < \deg(P_n)$

Exemple : $(1, X^2 - X + 2, X^4, X^6 + 1)$ ou $(1, X, X^2, \dots, X^n)$ sont échelonnées en degré

Théorème 16.2: Soit $\mathcal{F} = (P_1, P_2, \dots, P_n)$ une famille finie de polynômes non nuls de $\mathbb{K}[X]$.

Si $\mathcal{F}$ est échelonnée en degré alors $\mathcal{F}$ est libre dans $\mathbb{K}[X]$.

Définition: Soit $n\in\mathbb{N}$, on note $\mathbb{K}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de $\mathbb{K}[X]$ de degré inférieur ou égal à n.

Exemples:

$\mathbb{K}_0[X]$ est l'ensemble des polynômes constants, on l'identifie à $\mathbb{K}$.

$\mathbb{K}_2[X]$ est l'ensemble des polynômes de degré ≤ 2, $\mathbb{K}_2[X] = \{aX^2 + bX + c,\ a, b, c\in\mathbb{K}\}$.

Proposition 16.7: $\mathbb{K}_n[X]$ un SEV de $\mathbb{K}[X]$ de dimension (n + 1)

La famille $(1, X, X^2, \dots, X^n)$ est appelée base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$.

3. Arithmétique dans $\mathbb{K}[X]$

Définition: Soit A et B deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$. On dit que B divise A ou encore que A est un multiple de B lorsqu'il existe $D\in\mathbb{K}[X]$ tel que $A = BD$. On note $B|A$.

Remarques:
★ Si $A\neq 0$ et si $B|A$ alors $\deg(B) \leq \deg(A)$.
★ $\forall P\in\mathbb{K}[X]$, $0 = P\times 0$ donc P divise 0.
★ 0 ne divise que lui-même.

Vocabulaire: P et Q sont dits associés lorsque $P|Q$ et $Q|P \Leftrightarrow \exists\lambda\in\mathbb{K}^*, P = \lambda Q$.

Théorème 16.3 et définition: Soit A et B deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$, $B \neq 0$.
Il existe un unique couple de polynômes (Q, R) de $(\mathbb{K}[X])^2$ tel que:

$A = BQ + R$ et $\deg(R) < \deg(B)$

Q est le quotient et R est le reste dans la **division euclidienne** de A par B.

Algorithme en annexe

Remarque: Il est clair que $B|A \Leftrightarrow R=0$

Dans la pratique: Le reste dans la division de P par $(X - a)$ est le polynôme constant $P(a)$

---

4. Dérivation formelle

4.1 Dérivée première

Définition: Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ un polynôme de $\mathbb{K}[X]$. On note P' et on appelle polynôme dérivé de P le polynôme défini par:

$P' = 0$ si $\deg(P) \leq 0$ et $P' = \sum_{k=1}^{n} k a_k X^{k-1} = a_1 + 2a_2 X + \ldots + n a_n X^{n-1}$ si $\deg(P) \geq 1$.

Remarques:
★ La définition appliquée à $P = X^n$ donne $(X^n)' = \begin{cases} 0 \text{ si } n=0 \\ nX^{n-1} \text{ sinon} \end{cases}$

★ Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, la fonction polynomiale associé à P' est la fonction dérivée de $\tilde{P}$.

Proposition 16.8 : Propriétés de la dérivation formelle: $\forall P, Q\in\mathbb{K}[X]$, $\forall\lambda\in\mathbb{K}$

① $\deg(P') = \begin{cases} -\infty \text{ si P est constant} \\ n-1 \text{ sinon} \end{cases}$ *évident*

② $(P + Q)'$ et $(\lambda P)' = \lambda P'$ *il suffit d'écrire les définitions*

③ $(PQ)' = P'Q + PQ'$

Preuve de ③ en annexe

4.2 Dérivées successives

Définition: Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ un polynôme de $\mathbb{K}[X]$. On définit les polynômes dérivés successifs de P par $P^{(0)} = P$ et $\forall k\in\mathbb{N}$, $P^{(k+1)} = (P^{(k)})'$

♥ A connaître: Dérivées successives de X^n.

★ Si $k < n$, $(X^n)^{(k)} = n(n-1)...(n-k+1)X^{n-k} = \dfrac{n!}{(n-k)!}X^{n-k}$

★ Si $k = n$, $(X^n)^{(n)} = n!$

★ Si $k > n$, $(X^n)^{(k)} = 0$

Conséquences :

★ Si $\deg(P) = n$ alors $\forall k \leq n$, $\deg(P^{(k)}) = n - k$ et $\forall k > n$, $P^{(k)} = 0$.

★ $P \in \mathbb{K}_n[X] \Leftrightarrow P^{(n+1)} = 0$

Propriétés de la dérivation formelle d'ordre k: $\forall$ P, Q$\in\mathbb{K}[X]$, $\forall\lambda\in\mathbb{K}$ et $\forall k\in\mathbb{N}$

① $(P + Q)^{(k)} = P^{(k)} + Q^{(k)}$ et $(\lambda P)^{(k)} = \lambda P^{(k)}$ *par récurrence*

② $(PQ)^{(k)} = \displaystyle\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i} P^{(i)}Q^{(k-i)}$ *Formule de Leibniz pour les polynômes, par récurrence.*

4.3 Formule de Taylor pour les polynômes:

Théorème 16.4: $\forall n\in\mathbb{N}$, $\forall P\in\mathbb{K}_n[X]$, $\forall a\in\mathbb{K}$, $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k$

ou encore $P(X + a) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{P^{(k)}(a)}{k!}X^k$

Dans la pratique:

★ La famille $(1, (X - a), (X - a)^2, ..., (X - a)^n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$ appelée base de Taylor.

★ La formule de Taylor donne directement une expression du reste dans la division euclidienne de P par $(X - a)^k$: $R = \displaystyle\sum_{i=0}^{k-1}\frac{P^{(i)}(a)}{i!}(X-a)^i = P(a) + P'(a) + ... + \frac{P^{(k-1)}(a)}{k!}(X-a)^{k+1}$

★ Pour $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}a_kX^k$, la formule de Taylor avec $a = 0$ donne directement une expression des coefficients de P : $a_k = \dfrac{P^{(k)}(0)}{k!}$

---

5. Racines d'un polynôme

5.1 Définition et caractérisation

Définition: Soit $P\in\mathbb{K}[X]$ et $\alpha\in\mathbb{K}$, on dit que α est une racine de P lorsque $P(\alpha) = \tilde{P}(\alpha) = 0$

Remarques:

★ Le polynôme nul a une infinité de racines.

★ Un polynôme constant non nul n'a pas de racines dans $\mathbb{K}$.

Proposition 16.9: Soit $P\in\mathbb{K}[X]$ et $\alpha\in\mathbb{K}$

① α est racine de P $\Leftrightarrow (X - \alpha) \mid P$

② $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ deux à deux distincts dans $\mathbb{K}$ sont racines de P $\Leftrightarrow (X - \alpha_1)...(X - \alpha_n) \mid P$

Corollaire: Soit $P\in\mathbb{K}[X]$

① Si $\deg(P) = n \geq 0$, alors P possède au plus n racines.

② Si $P\in\mathbb{K}_n[X]$ possède au moins (n+1) racines alors $P = 0$.

③ Si P a une infinité de racines dans $\mathbb{K}$ alors $P = 0$.

5.2 Ordre de multiplicité d'une racine

Définition: Soit $P\in\mathbb{K}[X]$, $\alpha\in\mathbb{K}$ et $m\in\mathbb{N}^*$.

On dit que α est racine de P d'ordre de multiplicité (ou d'ordre) m lorsque $(X-\alpha)^m$ divise P et $(X-\alpha)^{m+1}$ ne divise pas P. *C'est à dire* : $\exists Q\in\mathbb{K}[X]$, $P = (X-\alpha)^m Q$ et $Q(\alpha) \neq 0$

Vocabulaire:
Si m = 1 on dit que a est racine simple, si m = 2, racine double et si m = 3 racine triple.
Si $m \geq 2$ on dit que a est une racine multiple de P.

Proposition 16.10: Soit $P\in\mathbb{K}[X]$ et $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_p$ deux à deux distincts dans $\mathbb{K}$.

$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_p$ sont racines de P de multiplicité respectives $m_1, m_2,..., m_p$ si et seulement si $\left(X-\alpha_1\right)^{m_1} \times\ldots\times\left(X-\alpha_p\right)^{m_p}$ / P et les α_i ne sont pas racines du quotient.

Corollaire: Soit $P\in\mathbb{K}[X]$

Si $\deg(P) = n \geq 0$ alors P possède au plus n racines comptées avec leur ordre de multiplicité c'est à dire $m_1 + m_2 + .. + m_p \leq n$.

Proposition 16.11: Caractérisation à l'aide des dérivées successives:
Soit $P\in\mathbb{K}[X]$, $\deg(P) \geq 1$, $\alpha\in\mathbb{K}$ et $m\in\mathbb{N}^*$, α est racine de P d'ordre de multiplicité m si et seulement si $P(\alpha) = P'(\alpha) = ... = P^{(m-1)}(\alpha) = 0$ et $P^{(m)}(\alpha) \neq 0$

Remarque: Ce résultat montre que si a est racine de P d'ordre de multiplicité m alors α est racine de P' d'ordre m-1, de P'' d'ordre m-2 etc...

Attention:
Si on a $(X - \alpha)^k \mid P$ alors α est racine de P d'ordre au moins k.
De même si $P(\alpha) = P'(\alpha) = ...= P^{(k-1)}(\alpha) = 0$.

Autrement dit, m est l'ordre de la première dérivée ne s'annulant pas en α

---

6. Factorisation dans $\mathbb{K}[X]$:

6.1 Polynômes irréductibles:

Définition: Soit $P\in\mathbb{K}[X]$, $\deg(P) \geq 1$.

P est irréductible lorsque $\forall A, B\in\mathbb{K}[X]$, $P = AB \Rightarrow \deg(A) = 0$ ou $\deg(B) = 0$

ou encore : P est irréductible si les seuls polynômes qui le divisent sont constants.

A savoir: Tout polynôme de degré 1 est irréductible dans $\mathbb{K}[X]$.

Attention: X^2+1 est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$ mais pas dans $\mathbb{C}[X]$ par $X^2+1 = (X - i)(X + i)$

Proposition 16.12: Soit $P\in\mathbb{K}[X]$, $\deg(P) \geq 1$.

① P admet un diviseur irréductible.
② P se décompose en produit de facteurs irréductibles

6.2 Cas où $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

Théorème de d'Alembert–Gauss: Tout polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$ admet au moins un racine.

Admis, appelé aussi théorème fondamental de l'algèbre

Corollaire:
① Les polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ sont les polynômes de degré 1
② Tout polynôme P de $\mathbb{C}[X]$ de degré $n \geq 1$ peut s'écrire sous la forme:

$P = \lambda \prod_{i=1}^{r} (X - \alpha_i)^{m_i}$ où $\lambda, \alpha_1,\dots,\alpha_r \in \mathbb{C}$ et $r, m_1,\dots m_r \in \mathbb{N}^*$.

③ Tout polynôme P de $\mathbb{C}[X]$ de degré $n \geq 1$ a exactement n racines comptées avec leur ordre de multiplicité, c'est à dire : $m_1 + \dots + m_r = n$

Dans la pratique: Pour factoriser dans $\mathbb{C}[X]$, on cherche les racines, si ce n'est pas possible, on utilise des formules comme le binôme de Newton ou Bernoulli.

♥ A connaître: En notant $\omega_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$, $\boxed{X^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1} (X - \omega_k)}$ dans $\mathbb{C}[X]$.

6.3 Cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$:

Proposition 16.13: Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ avec $\deg(P) \geq 1$. Si P admet une racine complexe α de multiplicité m alors $\overline{\alpha}$ est aussi racine de P de multiplicité m.

Conséquences: Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ avec $\deg(P) \geq 1$.
★ Les racines de P sont réelles ou deux à deux conjuguées.
★ Tout polynôme de $\mathbb{R}[X]$ de degré impair admet au moins une racine réelle.

Proposition 16.14: Les polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ sont les polynômes de degré 1 et les polynômes de degré 2 de discriminant négatif.

⚠ Attention: l'absence de racines réelles n'entraîne l'irréductibilité : aucun polynôme de deg ≥ 3 n'est irréductible dans $\mathbb{R}$.

Corollaire: Tout polynôme P de $\mathbb{R}[X]$ de degré $n \geq 1$ peut s'écrire sous la forme:

$P = \lambda \prod_{i=1}^{s} (X - \alpha_i)^{m_i} \prod_{j=1}^{t} (X^2 + \beta_j X + \gamma_j)^{n_j}$

où λ et $\alpha_1,\dots,\alpha_s, \beta_1,\dots\beta_t, \gamma_1,\dots, \gamma_t \in \mathbb{R}$, $s, t \in \mathbb{N}$ et, $m_1,\dots, m_s, n_1,\dots, n_t \in \mathbb{N}^*$.

Dans la pratique: On factorise P dans $\mathbb{C}[X]$ et on regroupe les racines deux à deux conjuguées.

♥ A connaître: Factorisation de $X^n - 1$ dans $\mathbb{R}[X]$. On part de $X^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1} (X - \omega_k)$ dans $\mathbb{C}[X]$.

1er cas: n est pair, on pose $n = 2p$.

$$\boxed{X^{2p} - 1 = (X-1)(X+1) \prod_{k=1}^{p-1} (X - \omega_k)(X - \overline{\omega_k}) = (X-1)(X+1) \prod_{k=1}^{p-1} \left(X^2 - 2\cos\frac{k\pi}{p} X + 1\right)}$$

2ème cas: n est impair, on pose $n = 2p+1$.

$$\boxed{X^{2p+1} - 1 = (X-1) \prod_{k=1}^{p} (X - \omega_k)(X - \overline{\omega_k}) = (X-1) \prod_{k=1}^{p} \left(X^2 - 2\cos\frac{2k\pi}{2p+1} X + 1\right)}$$

7. Relation entre coefficients et racines :

Définition: Soit P un polynôme de $\mathbb{K}[X]$, de degré $n \geq 1$.

P est scindé sur $\mathbb{K}$ si P se décompose en produit de facteurs irréductibles de degré 1, c'est à dire, $P = \lambda \prod_{k=1}^{n} (X - \alpha_k)$ avec λ coefficient dominant de P et $\alpha_1, \alpha_2,\dots,\alpha_n$ des scalaires pas nécessairement distincts.

Remarque : Tous les polynômes sont scindés sur $\mathbb{C}$.

Proposition 16.15: Somme et produit des racines : Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ un polynôme de $\mathbb{K}[X]$, de degré $n \geq 1$, scindé sur $\mathbb{K}$, de racines $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ non nécessairement distinctes.

On a , $S = \alpha_1 + .. + \alpha_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$ et $P = \alpha_1 \ldots \alpha_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$

♥ A connaître: Pour n = 2 et n = 3

Si $aX^2 + bX + c = a(X-\alpha_1)(X-\alpha_2)$ alors $S = \alpha_1 + \alpha_2 = -\frac{b}{a}$ et $P = \alpha_1.\alpha_2 = \frac{c}{a}$

Si $aX^3 + bX^2 + cX + d = a(X-\alpha_1)(X-\alpha_2)(X-\alpha_3)$ alors $S = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = -\frac{b}{a}$ et $P = \alpha_1.\alpha_2.\alpha_3 = -\frac{d}{a}$.

On a aussi $\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3 = \frac{c}{a}$.

Application: $\begin{cases} x+y+z=S \\ xy+xz+yz=Q \\ xyz=P \end{cases} \Leftrightarrow$ x, y et z sont les racines de $X^3 - SX^2 + QX - P$.

8. Décomposition en éléments simples de certaines fractions rationnelles et applications

Def : On appelle fraction rationnelle le quotient de deux polynômes P et Q de $\mathbb{K}[X]$, avec $Q \neq 0$.

Si $F = \frac{P}{Q}$, on appelle pôles de F les racines du polynômes Q.

Proposition 16.16 : Soit $F = \frac{P}{Q}$, une fraction rationnelle et E le quotient dans la division euclidienne de P par Q

Si Q est scindé à racines simples avec $Q = \mathrm{cdom}(Q)\prod_{i=1}^{n}(X-\alpha_i)$,

alors $\exists\,!(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$, $F = E + \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{X-\alpha_i}$

Admis

Dans la pratique : Conformément au programme de PCSI, dans le cas où Q a des racines multiples ou encore si Q n'est pas scindé dans $\mathbb{R}$, la décomposition en éléments simples sera guidée par l'énoncé.

Applications :

① Calculer $I = \int_0^1 \frac{x^3-1}{x^2+3x+2}$

② Calculer $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$

③ Calculer la dérivée nième de $f : x \mapsto \frac{x^2+5}{x^3-3x^2+2x}$

Annexe: Preuve de la proposition 16.9

1er cas : Si P = 0 ou Q = 0 alors l'égalité est vraie.

2nd cas : Supposons $P\neq 0$ et $Q\neq 0$. En notant p = deg(P) et q = deg(Q), on a

$P = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^{q} b_k X^k$

• Par définition $PQ = \sum_{k=0}^{p+q} c_k X^k$ avec $c_k = \sum_{i=0}^{k} a_i\, b_{k-i}$ et $(PQ)' = \sum_{k=0}^{p+q-1} (k+1) c_{k+1} X^k$

• D'autre part, $P' = \sum_{k=0}^{p-1} (k+1) a_{k+1} X^k = \sum_{k=0}^{p-1} \alpha_k X^k$ et $Q' = \sum_{k=0}^{q-1} (k+1) b_{k+1} X^k = \sum_{k=0}^{q-1} \beta_k X^k$, d'où

$PQ' = \sum_{k=0}^{p+q-1} d_k X^k$ où $d_k = \sum_{i=0}^{k} a_i\, \beta_{k-i} = \sum_{i=0}^{k} (k-i+1) a_i\, b_{k+1-i}$ et $P'Q = \sum_{k=0}^{p+q-1} e_k X^k$ où

$e_k = \sum_{j=0}^{k} \alpha_j b_{k-j} = \sum_{j=0}^{k} (j+1) a_{j+1} b_{k-j}$ et donc $PQ' + P'Q = \sum_{k=0}^{p+q-1} \left(d_k + e_k\right) X^k$

Calculons $d_k + e_k = \sum_{i=0}^{k} (k-i+1) a_i\, b_{k+1-i} + \sum_{j=0}^{k} (j+1) a_{j+1} b_{k-j}$

En posant i = j + 1 dans la deuxième somme, on obtient,

$$\begin{aligned} d_k + e_k &= \sum_{i=0}^{k} (k-i+1) a_i\, b_{k+1-i} + \sum_{i=1}^{k+1} i a_i\, b_{k+1-j} \\ &= (k+1) a_o b_{k+1} + \sum_{i=1}^{k} (k-i+1+i) a_i\, b_{k+1-i} + (k+1) a_{k+1} b_0 \\ &= (k+1) \sum_{i=0}^{k+1} a_i\, b_{k+1-i} \end{aligned}$$

On reconnaît l'expression de (k+1) c_{k+1}.

• Ccl: (PQ)' et (PQ'+P'Q) ont même degré (p + q-1) et mêmes coefficients donc ils sont égaux.