Chapitre 17 - Comparaison locale de fonctions, développements limités.

Dans ce chapitre, I est un intervalle de $\mathbb{R}$ non trivial, a un réel de I ou une borne de I donc éventuellement $+\infty$ ou $-\infty$. $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1. Comparaisons locales de fonctions

1.1. Domination et négligeabilité en a :

Déf: Soit f et g définies sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$.

- On dit que f est dominée par g au voisinage de a et on note $f \underset{x\to a}{=} O(g)$ lorsqu'il existe une fonction B définie au voisinage de a telle que: $\begin{cases} B \text{ est bornée} \\ f(x) = B(x)g(x) \end{cases}$ sur ce voisinage
- On dit que f est négligeable devant g au voisinage de a et on note $f \underset{x\to a}{=} o(g)$ lorsqu'il existe une fonction ε définie au voisinage de a telle que: $\begin{cases} \varepsilon(x) \xrightarrow[x\to a]{} 0 \\ f(x) = \varepsilon(x)g(x) \text{ sur ce voisinage} \end{cases}$.

★ **Autres notations** :

$f \underset{x\to a}{=} O(g)$ peut se remplacer par $f \underset{a}{=} O(g)$, voire f = O(g) si il n'y a pas d'ambiguïté.

$f \underset{x\to a}{=} o(g)$ se note aussi $f \underset{a}{=} o(g)$ voire f = o(g) si il n'y a pas d'ambiguïté ou encore $f \underset{x\to a}{\ll} g$

NB: En physique, |X|<<1 signifie que $|X| \to 0$

★ **Dans la pratique**: Si g ne s'annule pas au voisinage de a, sauf peut-être en a et si dans ce cas g(a) = f(a) = 0, on utilise les caractérisations suivantes:

$$\boxed{f \underset{x\to a}{=} O(g) \Leftrightarrow \frac{f}{g} \text{ est bornée au voisinage de a}}$$

$$\boxed{f \underset{x\to a}{=} o(g) \Leftrightarrow \frac{f}{g} \xrightarrow[x\to a]{} 0}$$

★ **Conséquences immédiates des définitions:**

- Si $f \underset{x\to a}{=} o(g)$, alors $f \underset{x\to a}{=} O(g)$
- $f \underset{x\to a}{=} O(1)$ signifie que f bornée au voisinage de a.
- $f \underset{x\to a}{=} o(1)$ signifie que f tend vers 0 en a.

Attention : Il ne s'agit pas ici de vraies égalités mais de relation d'appartenance :
$x \underset{x\to+\infty}{=} o(e^x)$ et $x^2 \underset{x\to+\infty}{=} o(e^x)$ mais $x \neq x^2$.

Proposition 17.1 : Comparaison des fonctions usuelles
Soit α, β et a trois réels.

① Comparaison en $+\infty$:

Si $\alpha\in\mathbb{R}$ et $\beta > 0$, $(\ln(x))^\alpha \underset{x\to+\infty}{=} o(x^\beta)$ et $x^\alpha \underset{x\to+\infty}{=} o(e^{\beta x})$

Si $\alpha < \beta$, $x^\alpha \underset{x\to+\infty}{=} o(x^\beta)$.

Si $\alpha\in\mathbb{R}$ et a > 1, et $x^\beta \underset{x\to+\infty}{=} o(a^x)$

② Comparaison en 0 (se déduit de ① en posant X = 1/x)

Si $\alpha\in\mathbb{R}$ et $\beta > 0|\ln(x)|^{\alpha} \underset{x\to 0}{=} o(\frac{1}{x^{\beta}})$

Si $\alpha < \beta$, $x^{\beta} \underset{x\to 0}{=} o(x^{\alpha})$

③ Comparaison en $-\infty$ (se déduit de ① en posant X = -x)

Si $\alpha\in\mathbb{R}$ et $\beta > 0$, $e^{\beta x} \underset{x\to -\infty}{=} o(\frac{1}{|x|^{\alpha}})$

Si $\alpha\in\mathbb{R}$ et $a > 1$, $a^{x} \underset{x\to -\infty}{=} o(\frac{1}{|x|^{\alpha}})$

Démo: On utilise la caractérisation par la limite du quotient (chapitre 3)

Les résultats du ① (et par corollaire ceux de ② et ③) sont appelés résultats de croissances comparées, on peut retenir que si 0 < si $0 < \alpha < \beta$ et $1 < a < b$, on a

$$f \text{ bornée} \underset{x\to+\infty}{\ll} (\ln(x))^{\alpha} \underset{x\to+\infty}{\ll} x^{\alpha} \underset{x\to+\infty}{\ll} x^{\beta} \underset{x\to+\infty}{\ll} a^{x} \underset{x\to+\infty}{\ll} b^{x}$$

En particulier $\forall n\in\mathbb{N}$, $x^{n+1} \underset{x\to 0}{=} o(x^{n})$ et $x^{n} \underset{x\to +\infty}{=} o(x^{n+1})$

★ Dans la pratique : on utilise la proposition 17.1 pour comparer f(x) et x^{α} ou f(x) et $\frac{1}{x^{\alpha}}$

- $f(x) \underset{x\to a}{=} o(x^{\alpha}) \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x^{\alpha}} \xrightarrow[x\to a]{} 0$

- $f(x) \underset{x\to a}{=} o(\frac{1}{x^{\alpha}}) \Leftrightarrow x^{\alpha}f(x) \xrightarrow[x\to a]{} 0$

Proposition 17.2 : Soit f, g, h, k définies sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$.

① Si $f \underset{x\to a}{=} O(g)$ et $g \underset{x\to a}{=} O(h)$ alors $f \underset{x\to a}{=} O(h)$

② Si $f \underset{x\to a}{=} O(g)$ et $g \underset{x\to a}{=} o(h)$ alors $f \underset{x\to a}{=} o(h)$

③ Si $f \underset{x\to a}{=} o(g)$ et $g \underset{x\to a}{=} o(h)$ alors $f \underset{x\to a}{=} o(h)$

Démo : cf chapitre 9

★ **Dans la pratique** : Si $f \underset{x\to a}{=} o(\lambda x^{\alpha})$ avec $\lambda \neq 0$ alors $f \underset{x\to a}{=} o(x^{\alpha})$ car $(\lambda x^{\alpha}) \underset{x\to a}{=} O(x^{\alpha})$

Proposition 17.3 : **Compatibilité avec les opérations**

① Linéarité: si $f \underset{x\to a}{=} o(h)$ et si $g \underset{x\to a}{=} o(h)$ alors $\alpha f + \beta g \underset{x\to a}{=} o(h)$

② Produit:

- Si $f \underset{x\to a}{=} o(g)$ alors $f.h \underset{x\to a}{=} o(g.h)$
- Si $f \underset{x\to a}{=} o(h)$ et $g \underset{x\to a}{=} o(k)$ alors on a $f.g = o(h.k)$

③ Substitution : Soit $u : J\to I$, $b\in J$ ou borne de J.
Si $u(x) \xrightarrow[x\to b]{} a$ et si $f \underset{x\to a}{=} o(g)$ alors $f\circ u \underset{x\to b}{=} o(g\circ u)$

Ces relations restent vraies pour la relation de domination

1.2. Fonctions équivalentes

Déf: Soit f et g définies sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$.

On dit que f est équivalente à g au voisinage de a et on note $f \underset{a}{\sim} g$ ou $f \underset{x\to a}{\sim} g$ lorsqu'il existe une fonction φ définie au voisinage de a telle que $\begin{cases} \varphi(x) \xrightarrow[x\to a]{} 1 \\ f(x) = \varphi(x)g(x) \text{ sur ce voisinage} \end{cases}$.

★ **Conséquences immédiates des définitions:**

- Soit $\ell \in \mathbb{R}^*$, $f \underset{a}{\sim} \ell \Leftrightarrow f \xrightarrow[x\to a]{} \ell$
- $f \underset{a}{\sim} 0$ signifie que f est identiquement nulle au voisinage de 0 et pas que $f \xrightarrow[x\to a]{} 0$.

★ **Dans la pratique** : Si g ne s'annule pas au voisinage de a, sauf peut-être en a et si dans ce cas g(a) = f(a) = 0, on utilise les caractérisations suivantes:

$\boxed{f \underset{a}{\sim} g \Leftrightarrow (f - g) \underset{x\to a}{=} o(g) \Leftrightarrow f \underset{x\to a}{=} g + o(g)}$ et $\boxed{f \underset{a}{\sim} g \Leftrightarrow \dfrac{f}{g} \xrightarrow[x\to a]{} 1}$

Proposition 17.4 : Soit f, g, h trois fonctions de I dans $\mathbb{K}$.

① Réflexivité: $f \underset{a}{\sim} f$

② Symétrie: Si $f \underset{a}{\sim} g$ alors $g \underset{a}{\sim} f$

③ Transitivité: Si $f \underset{a}{\sim} g$ et $g \underset{a}{\sim} h$ alors $f \underset{a}{\sim} h$.

♥ **Equivalents usuels en 0**

$e^h \underset{0}{\sim} 1$ $\quad (e^h - 1) \underset{0}{\sim} x$ $\quad \ln(1+h) \underset{0}{\sim} h$

$(1+h)^\alpha - 1 \underset{0}{\sim} \alpha h$ en particulier pour $\alpha = \frac{1}{2}$, on a $\left(\sqrt{1+h} - 1\right) \underset{0}{\sim} \frac{1}{2}h$

$\cos(h) \underset{0}{\sim} 1$ $\quad \sin(h) \underset{0}{\sim} h$ $\quad \tan(h) \underset{0}{\sim} h$ $\quad (\cos(h) - 1) \underset{0}{\sim} -\frac{h^2}{2}$ (*)

$\arccos(h) \underset{0}{\sim} \frac{\pi}{2}$ $\quad \arcsin(h) \underset{0}{\sim} h$ $\quad \arctan(h) \underset{0}{\sim} h$

$\mathrm{ch}(h) \underset{0}{\sim} 1$ $\quad \mathrm{sh}(h) \underset{0}{\sim} h$ $\quad \mathrm{th}(h) \underset{0}{\sim} h$

♥ **Equivalents d'une fonction polynomiale** : Soit $P(x) = a_n x^n + \ldots + a_p x^p$ avec $a_n \neq 0$ et $a_p \neq 0$

on a $P(x) \underset{\pm\infty}{\sim} a_n x^n$ et $P(x) \underset{0}{\sim} a_p x^p$

Proposition 17.5 : Règle de calculs sur les équivalents: Soit f, g, h et k de $I \to \mathbb{K}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$

① Produit d'équivalents:, Si $f \underset{a}{\sim} h$ et $g \underset{a}{\sim} k$ alors $fg \underset{a}{\sim} hk$

② Puissance: Si $f \underset{a}{\sim} g$ alors, sous réserve d'existence, $f(x)^\alpha \underset{a}{\sim} g(x)^\alpha$

③ Quotient d'équivalents: Si $f \underset{a}{\sim} h$ et $g \underset{a}{\sim} k$ alors, sous réserve d'existence $f/g \underset{a}{\sim} h/k$

④ Substitution: Soit $u : J \to I$, $b \in J$ ou borne de I.
Si $u(x) \xrightarrow[x\to b]{} a$ et si $f \underset{a}{\sim} g$ alors $f \circ u \underset{b}{\sim} g \circ u$

<u>Démo</u>: On calcule la limite du quotient

ATTENTION PAS DE SOMME (ni de différence, même une constante...)
Comment faire si on doit donner un équivalent d'une somme?
- On cherche le terme prépondérant pour écrire $S(x) \underset{x\to a}{=} g(x) + o(g(x))$.

- On cherche à factoriser la somme pour utiliser les règles de calcul

Attention: Sauf exception, la composition à gauche n'est pas compatible avec les relations de comparaison : $u(x) \underset{a}{\sim} v(x)$ n'implique pas $f(u(x)) \underset{a}{\sim} f(v(x))$

Proposition 17.6 : Soit f, g, h, k quatre fonctions de I dans $\mathbb{K}$.
Si $k(x) \leq g(x) \leq h(x)$ au voisinage de a et $h \underset{a}{\sim} f$ et $k \underset{a}{\sim} f$ alors $g \underset{a}{\sim} f$

★ Méthode classique: Les équivalents usuels sont en 0, on pourra s'y ramener en posant:
- $x = a + h$ pour la recherche d'un équivalent en a réel
- $x = \dfrac{1}{h}$ pour la recherche d'un équivalent en a $\pm\infty$

1.3 Propriétés conservées par équivalents

Proposition 17.7:
① Si $f \underset{a}{\sim} g$ alors f et g sont de même signe au voisinage de a
②Si $f \underset{a}{\sim} g$ et si $\lim g = \ell$ alors $\lim f = \ell$

Exemples d'utilisation traité en classe:

Calcul de limite, existence d'un prolongement par continuité

Préciser la nature de la branche infinie de la courbe représentative de f ainsi que sa position relative au voisinage de $+\infty$.

---

2. Développement limité d'ordre n en a.

2.1. Présentation et définition:

Déf: Soit $f : I \to \mathbb{K}$ avec $0 \in I$ ou 0 est une borne de I.
On dit que f admet un développement limité d'ordre n en 0, noté DLn(0), lorsqu'il existe un polynôme $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ de $\mathbb{R}_n[X]$ tel que : $f(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \underset{x\to 0}{=} o(x^n)$.

Le $DL_n(0)$ de f est : $f(x) \underset{x\to 0}{=} \underbrace{\sum_{k=0}^{n} a_k x^k}_{\text{Partie régulière}} + \underbrace{o(x^n)}_{\text{Reste d'ordre n}}$

Remarques :
- L'ordre du DL est donné par l'exposant de x dans le reste et pas par le degré de la partie régulière.
- Toute fonction polynômiale f de degré p admet pour tout $n \geq p$, un DL d'ordre n en 0 de partie régulière f(x) et de reste 0.

Exemple 1: $f : x \to \dfrac{1}{1-x}$ admet un DL à tout ordre en 0 de partie régulière $1 + x + x^2 + .. + x^n$.

ou encore: $\forall n \in \mathbb{N}$, $\boxed{\dfrac{1}{1-x} \underset{x\to 0}{=} 1 + x + x^2 + .. + x^n + o\ (x^n)\ ♥}$

Proposition 17.8 : Propriétés des $DL_n(0)$:

① Si f admet un $DL_n(0)$, sa partie régulière est unique et on peut donc parler **du** $DL_n(0)$ de f.

② Si f admet un $DL_n(0)$ tel que $f(x) \underset{x\to 0}{=} P(x) + o(x^n)$ alors, pour tout $\lambda\in\mathbb{R}$ et tout $p\in\mathbb{N}$, on peut substituer λx^p à x pour obtenir: $f(\lambda x^p) \underset{x\to 0}{=} P(\lambda x^p) + o(x^{np})$

③ Si f est paire (resp. impaire) et admet un $DL_n(0)$ alors la partie régulière est paire (resp. impaire).

✍ En substituant – x à x puis x² à x dans l'exemple 1, on obtient :

$$\frac{1}{1+x} \underset{0}{=} 1 - x + x^2 + \cdots (-1)^n x^n + o(x^n)$$

$$\frac{1}{1+x^2} \underset{0}{=} 1 - x^2 + x^4 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + o(x^{2n})$$

♥

Déf: Soit $f: I \to \mathbb{K}$ et a un réel de I ou une borne de I.

On dit que f admet un développement limité d'ordre n en a, noté DLn(a), lorsqu'il existe un polynôme $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ de $\mathbb{R}_n[X]$ tel que : $f(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k (x-a)^k \underset{x\to a}{=} o((x-a)^n)$.

Le $DL_n(a)$ de f est: $f(x) \underset{x\to a}{=} \underbrace{\sum_{k=0}^{n} a_k (x-a)^k}_{\text{Partie régulière}} + \underbrace{o((x-a)^n)}_{\text{Reste d'ordre } n}$

★ Remarques:

- Par convention, on écrit les termes du DL_n dans l'ordre croissant des puissances de x de sorte que chaque terme est négligeable devant ceux écrits à sa gauche au voisinage de a.
- On ne développe pas les $(x - a)^k$ dans l'écriture du $DL_n(a)$

★ Dans la pratique: **f admet un $DL_n(a)$ ssi $g: h \to f(a + h)$ admet un $DL_n(0)$.**
On se ramènera systématiquement en 0 par le changement de variable x = a + h

Proposition 17.9 : Propriétés des $DL_n(a)$:

① Si f admet un $DL_n(a)$, sa partie régulière est unique et on peut donc parler **du** $DL_n(a)$ de f.

② Si f admet un $DL_n(a)$, alors pour tout entier $p \le n$, f admet un $DL_p(a)$ que l'on obtient en tronquant le $DL_n(a)$ à l'ordre p, c'est à dire

Si $f(x) \underset{a}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k (x-a)^k + o((x-a)^n)$ alors $\forall p\in\mathbb{N}$, $p \le n$, $f(x) \underset{a}{=} \sum_{k=0}^{p} a_k (x-a)^k + o((x-a)^p)$

2.2. Liens avec la dérivation

Théorème 17.1: Soit f définie sur I, sauf peut-être en a.

① f admet un $DL_0(a)$ si et seulement si f admet une limite finie en a.

Donc
- si f est définie en a et admet un $DL_0(a)$ alors f est continue en a
- si f n'est pas définie en a et admet un $DL_0(a)$ alors f est prolongeable par continuité en a

Dans les deux cas, on a: $f(x) \underset{a}{=} f(a) + o(1)$

② Soit f définie en a, f admet un $DL_1(a)$ si et seulement si f, ou son prolongement par continuité en a, est dérivable en a et dans ce cas, on a: $f(x) \underset{a}{=} f(a) + f'(a)(x-a) + o(x-a)$

〆 Attention : Si une fonction admet un $DL_n(a)$ avec $n \ge 2$, elle n'est pas nécessairement n fois dérivable en a

Théorème 17.2: formule de Taylor-Young
Si f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I alors f possède un DL_n en tout réel a de I donné par:

$$f(x) \underset{x\to a}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o((x-a)^n)$$

$$\underset{x\to a}{=} f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + o((x-a)^n)$$

ou encore, en posant x = a + h: $f(a+h) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} h^k + o(h^n)$

✍ Applications: DL_n des fonctions usuelles en 0

$$e^x \underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$\cos(x) \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\sin(x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$

$$(1+x)^\alpha \underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n) \text{ avec } \alpha \in \mathbb{R}$$

♥

Il faut Savoir retrouver rapidement les $DL_3(0)$

$$\sqrt{1+x} \underset{0}{=} 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{3}{16}x^3 + o(x^3) \text{ et } \frac{1}{\sqrt{1+x}} \underset{0}{=} 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + o(x^3)$$

Remarque : dans la pratique, on utilise peu cette formule pour obtenir le DL_n, on préférera les opérations, on l'utilise plutôt pour justifier l'existence d'un $DL_n(a)$ pour une fonction de classe C^n

2.3. Opérations sur les développements limités

Les résultats de cette partie sont énoncés pour les $DL_n(0)$ mais ils s'étendent aisément aux $DL_n(a)$ en posant x = a + h

Proposition 17.10: Linéarité et produit
Si f et g admettent un $DL_n(0)$ ayant pour partie régulière respectives P et Q alors

① $\alpha f + \beta g$ admet un $DL_n(0)$ de partie régulière $\alpha P + \beta Q$.

② fg admet un $DL_n(0)$ de partie régulière R obtenue en tronquant au degré n le produit PQ.

✍ Applications:

$$\text{ch}(x) \underset{0}{=} 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\text{sh}(x) \underset{0}{=} x + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$

♥

Proposition 17.11: Composition
Soit f et g définies au voisinage de 0 et admettant des $DL_n(0)$ de partie régulière P et Q.
Si $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ alors (gof) admet un $DL_n(0)$ de partie régulière R obtenue en tronquant au degré n le polynôme QoP.

Corollaire: Inverse, quotient

Si f admet un $DL_n(0)$ et est telle que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = a \neq 0$ alors $\dfrac{1}{f}$ admet un $DL_n(0)$, obtenu en écrivant $\dfrac{1}{f(x)} = \dfrac{1}{a(1\pm g(x))} = \dfrac{1}{a}\times\dfrac{1}{1\pm g(x)}$ avec $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$

Dans la pratique : On obtient le $DL_n(0)$ de $\dfrac{1}{1\pm g(x)}$ en composant le $DL_n(0)$ de $\dfrac{1}{1\pm h}$ avec celui de g, ce qui est possible car $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$.

✍ Applications: $\boxed{\tan(x) = \sin(x)\times\dfrac{1}{\cos(x)} \underset{0}{=} x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{2x^5}{15} + o(x^5)}$ ♥

Proposition 17.12 Intégration

Si f est continue sur I contenant 0, et admet un $DL_n(0)$ alors toute primitive F de f sur I admet un $DL_{n+1}(0)$ obtenue en <u>intégrant terme à terme</u> le $DL_n(0)$ de f <u>sans oublier de rajouter le terme constant</u> F(0). C'est à dire:

Si $f(x) \underset{0}{=} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o(x^n)$ alors $F(x) \underset{0}{=} F(0) + \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1} x^{k+1} + o(x^{n+1})$

✍ Applications:

$$\ln(1+x) \underset{0}{=} \underset{0}{\ln(1)} + x - \frac{x^2}{2} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + o(x^{n+1})$$

$$\ln(1-x) \underset{0}{=} \underset{0}{\ln(1)} - x - \frac{x^2}{2} - \ldots - \frac{x^{n+1}}{n+1} + o(x^{n+1})$$ ♥

$$\arctan(x) \underset{0}{=} \underbrace{\arctan(0)}_{0} + x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$$

***et également les DL_n de arccos et arcsin,* (ordre 3 ou 4)**

〆 **On ne dérive à priori pas les DL** mais <u>si</u> f admet un $DL_n(0)$ et <u>si on sait que</u> f' admet un $DL_{n-1}(0)$ alors on peut l'obtenir en dérivant terme à terme le $DL_n(0)$ de f. *C'est le cas quand f est de classe $\mathcal{C}^n$ et à fortiori de classe $\mathcal{C}^\infty$, votre professeur de physique pourra donc le faire...*

2.4 Applications des développements limités

① Recherche d'équivalents et calculs de limite

Proposition17.13 : Si f admet un $DL_n(a)$ de la forme

$$f(x) \underset{x\to a}{=} \sum_{k=p}^{n} a_k (x-a)^k + o((x-a)^n) = a_p (x-a)^p + \cdots a_n (x-a)^n + o((x-a)^n)$$ avec $a_p \neq 0$.

alors $f(x) \underset{x\to a}{\sim} a_p (x-a)^p$

② Etude locale de f en a

Proposition 17.14 : Si f admet un $DL_p(a)$ de la forme

$$f(x) \underset{x\to a}{=} a_0 + a_1(x-a) + a_p(x-a)^p + o((x-a)^p) \text{ avec } p \geq 2 \text{ et } a_p \neq 0.$$

alors
- f est continue en a ou prolongeable par continuité en a avec $f(a) = a_0$
- f ou f prolongée est dérivable en a avec $f'(a) = a_1$
- la position relative de C_f et de sa tangente en (a, f(a)) au voisinage de a, est donnée par le signe de $a_p(x - a)^p$

③ Extremum local

Proposition 17.15 : Soit f admettant un $DL_p(a)$ de la forme

$$f(x) \underset{x\to a}{=} f(a) + a_p(x-a)^p + o((x-a)^p) \text{ avec } p \geq 2 \text{ et } a_p \neq 0.$$

Si p est pair, f admet un extremum local en a.
Si p est impair, (a, f(a)) est un point d'inflexion de C_f

✍ Applications: On considère f de classe C^2 sur [a, b] et $x_0 \in]a, b[$.
a. On suppose que $f(x_0)$ est un extremum local de f, donner le $DL_2(x_0)$ de f.
b. Montrer que si $f'(x_0) = 0$ et si $f''(x_0) \neq 0$ alors f admet un extremum local en x_0.

Fiche : $DL_n(0)$ usuels :

$$\frac{1}{1-x} \underset{x\to 0}{=} 1+x+x^2+..+x^n+o(x^n) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n)$$

$$\frac{1}{1+x} \underset{0}{=} 1-x+x^2+\cdots(-1)^n x^n + o(x^n) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + o(x^n)$$

$$e^x \underset{0}{=} 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+o(x^n) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}+o(x^n)$$

$$ch(x) \underset{0}{=} 1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}+o(x^{2n+1}) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n}\frac{x^{2k}}{(2k)!}+o(x^{2n+1})$$

$$sh(x) \underset{0}{=} x+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+o(x^{2n+2}) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n}\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}+o(x^{2n+2})$$

$$\cos(x) \underset{0}{=} 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+o(x^{2n+1}) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}+o(x^{2n+1})$$

$$\sin(x) \underset{0}{=} x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+o(x^{2n+2}) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}+o(x^{2n+2})$$

$$\tan(x) = \underset{0}{=} x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+o(x^5)$$

$$(1+x)^\alpha \underset{0}{=} 1+\frac{\alpha}{1!}x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+o(x^n)$$
$$\underset{0}{=} 1+\sum_{k=1}^{n}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}x^k+o(x^n)$$

$$\sqrt{1+x} \underset{0}{=} 1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{3}{16}x^3+o(x^3) \text{ et } \frac{1}{\sqrt{1+x}} = \underset{0}{=} 1-\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}x^2-\frac{5}{16}x^3+o(x^3)$$

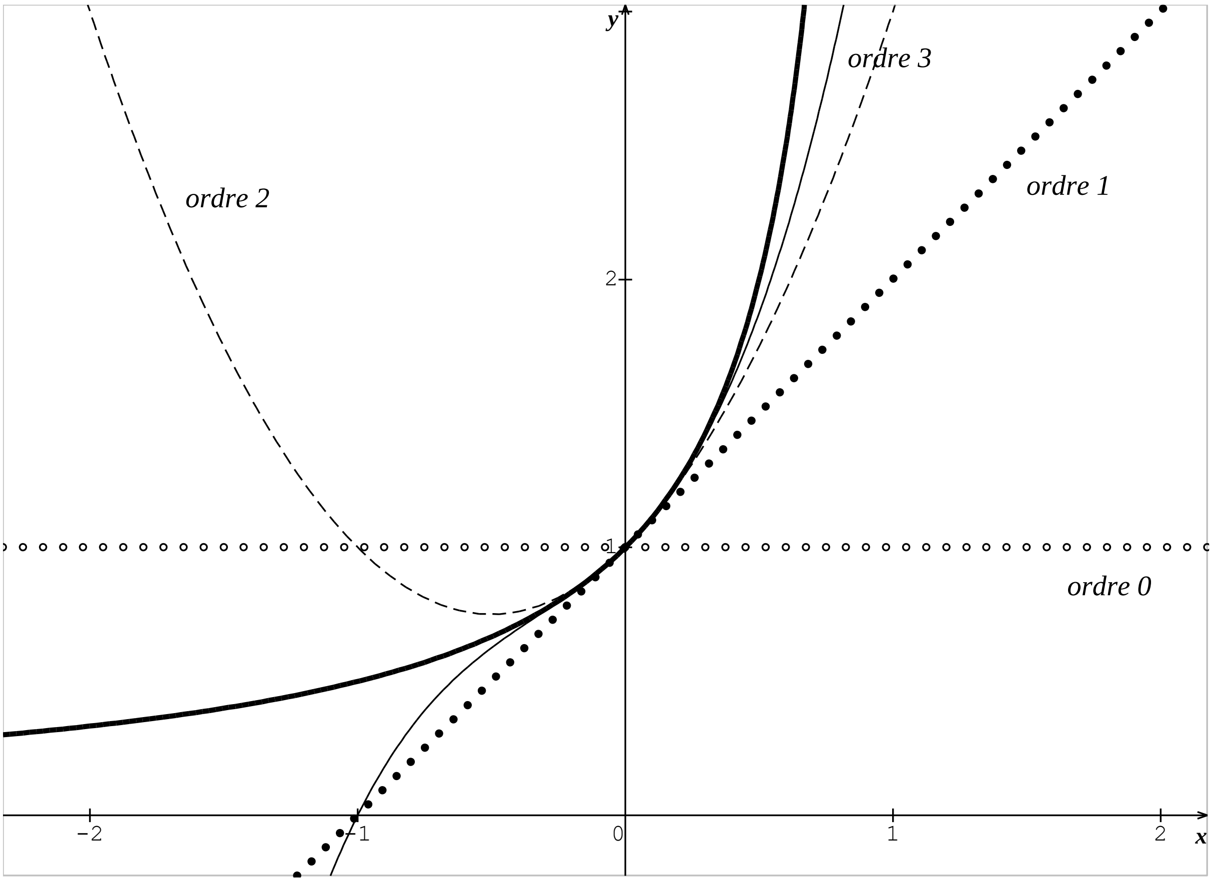
$$\ln(1+x) \underset{0}{=} \underbrace{\ln(1)}_{0}+x-\frac{x^2}{2}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}+o(x^{n+1})$$

$$\ln(1-x) \underset{0}{=} \underbrace{\ln(1)}_{0}-x-\frac{x^2}{2}-\ldots-\frac{x^{n+1}}{n+1}+o(x^{n+1})$$

$$\arctan(x) \underset{0}{=} \underbrace{\arctan(0)}_{0}+x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+o(x^{2n+2})$$

Annexes :

Graphique 1: DL en 0 de $f : x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$



Graphique 2: DL en 0 de $f : x \mapsto \cos x$