Exercices – Chapitre 14: Dérivabilité d'une fonction numérique

♦ Eléments de correction en ligne - ♥ A savoir refaire

Dérivabilité en a

♥ 14.1 Etudier la dérivabilité et donner la dérivée des fonctions suivantes:

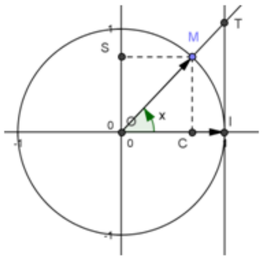
$f(x) = x^x$ $\quad g(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$ $\quad h(x) = \ln|\ln x|$ $\quad k(x) = \arccos(\tan(x))$

♥ 14.2 Etudier la dérivabilité de f en 0 dans les cas suivants :

a. $f(x) = \dfrac{x}{1+|x|}$ $\quad$ b. $f(x) = x^2\ln x$ et $f(0) = 0$ $\quad$ c. $f(x) = \begin{cases} x\ln x \text{ si } x > 0 \\ e^x - 1 \text{ si } x \le 0 \end{cases}$

♦ 14.3 *Dérivabilité de sinus et cosinus*

1.a. Etablir que pour tout réel de $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, $\cos x \le \dfrac{\sin x}{x} \le 1$



On pourra raisonner sur la figure ci -contre :

b. Etudier la limite du taux d'accroissement de sinus en 0.

2.a. Soit $a\in\mathbb{R}$, montrer que sinus est dérivable en a et que sin'(a) = cos(a).
b. Montrer que cos est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que cos' = -sin

14.4 Soit f dérivable en a, étudier $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{xf(a) - af(x)}{x-a}$ et $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a-h)}{h}$

♦ 14.5 Soit f une fonction dérivable sur [0, 1] ;
Donner une CNS sur f pour que la fonction g définie sur [0,1] par
$\forall x\in[0, \frac{1}{2}]$, g(x) = f(2x) et $\forall x\in]\frac{1}{2}, 1]$, g(x) = f(2x - 1) soit dérivable sur [0, 1].

Fonctions de classe $\mathcal{C}^n$

14.6 Montrer que

a. $f(x) = (1+x^2)^{\frac{1}{x}}$ si $x \ne 0$ et f(0) = 1 est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$

b. On pose $\forall x > 0$, $f(x) = x^3\ln x$. Montrer que f peut être prolongée par continuité en 0 puis montre que ce prolongement est de classe $\mathcal{C}^2$. Sur $\mathbb{R}_+$.

c. Pour tout $(a, b)\in\mathbb{R}^2$, on pose $\forall x\in\mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} e^x \text{ si } x \le 1 \\ x^2 + ax + b \text{ si } x > 1 \end{cases}$.

Déterminer les couples de réel (a, b) pour lesquels f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

♥ 14.7 Justifier que les fonctions suivantes sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I et déterminer $f^{(n)}$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

a. $f(x) = e^{2x}(x^2 - 3x + 1)$ $\quad$ b. $f(x) = \dfrac{1}{x^2-1}$, I =]1, +∞[

c. $f(x) = \cos^3 x$, I = $\mathbb{R}$. $\quad$ d. $f(x) = \sin x . e^x$, I = $\mathbb{R}$

e. $f(x) = x^2(1+x)^n$, I = $\mathbb{R}$. $\quad$ f. $f(x) = x^{n-1}.\ln(x)$, I =]0;+∞[

14.8 Soit $n\in\mathbb{N}$ et f_n définie sur]0, +∞[par $f_n(x) = x^n e^{1/x}$, justifier que f_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur

$]0, +\infty[$ et que $f_n^{(n+1)}(x) = \dfrac{(-1)^{n+1}}{x^{n+2}} e^{1/x}$

14.9 Soit la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = \begin{cases} x^{n+1} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$.

a. Montrer que f_0 est continue sur $\mathbb{R}$, puis que f_1 est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

b. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}$

♦ **14.10** Calculer la dérivée nième de la fonction $f: x \mapsto x^n (x+1)^n$.

En déduire une expression simple de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$

14.11 Soit f définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = \sqrt{x} e^x$
a. Justifier que f induit une bijection de $\mathbb{R}_+$ dans un intervalle J à préciser.
b. On note g la bijection réciproque. Montrer que g est dérivable sur $]0, +\infty[$.
c. Etudier la dérivabilité de g en 0.

♦ **14.12** Soit f une fonction dérivable sur I à valeurs dans $\mathbb{C}$.
Etudier la dérivabilité des fonctions $c: t \mapsto \overline{f(t)}$ et $m: t \mapsto |f(t)|$ sur I et calculer leurs dérivées.

♦ **14.13** Soit $f : t \mapsto \begin{cases} t^2 e^{i/t} & \text{si } t \neq 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases}$. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ mais que sa dérivée n'est pas continue en 0.

Dérivabilité sur un intervalle

♦ **14.14** Soit f et g deux fonctions dérivables sur [a, b] telles que f(a) = g(a) et f(b) = g(b). Montrer qu'il est possible de trouver un réel k tel que les courbes représentatives des fonctions f et g + k dans un repère orthonormé soient tangentes en un point.

♥ **14.15** ***Théorème de Rolle généralisé***:
Soit f une fonction définie et continue sur $I = [a, +\infty[$, dérivable sur $]a, +\infty[$ et telle que: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = f(a)$. Montrer qu'il existe $c \in]a, +\infty[$ tel que $f'(c) = 0$

Indication: Utiliser la fonction g:t->f($\frac{1}{t} + a - 1$) définie sur]0;1]

♥ **14.16** ***Egalité des accroissements finis généralisés***:
1. Soit f et g deux fonctions continues sur [a,b] et dérivable sur]a,b[avec a < b
Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que $f'(c).(g(b) - g(a)) = g'(c).(f(b) - f(a))$.
2a. En déduire le résultat suivant connu sous le nom de règle de l'Hospital : Soit f et g deux fonctions continues au voisinage V de x_0, dérivables sur $V\backslash\{x_0\}$, telles que $f(x_0) = g(x_0) = 0$ et que $\forall x \in V\backslash\{x_0\}$, $g'(x) \neq 0$. Si $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \ell$, alors $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \ell$

2.b. Déterminer $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - \sin x}{x^3}$

14.17 Soit f deux fois dérivable sur [a, b] vérifiant f(a) = f(b) = 0.

Montrer que pour tout réel c de]a, b[, il existe $d \in]a, b[$ tel que: $f(c) = \dfrac{(c-a)(c-b)}{2} f''(d)$.

On pourra s'intéresser à $\varphi \mapsto f(x) - \dfrac{(x-a)(x-b)}{2} A$ où A est une constante à déterminer.

♦ **14.18** ***Formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 2***

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur [a,b], montrer qu'il existe $c\in]a,b[$ tel que:

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b - a) + \frac{f''(c)}{2}(b - a)^2$$

♥ **14.19** Montrer que le théorème de Rolle ne s'étend pas aux fonctions à valeurs complexes en utilisant la fonction $x \mapsto e^{ix}$

♥ **14.20** ***Utilisations classiques des inégalités des accroissements finis:*** Montrer que

a. $\forall x\in\mathbb{R},\ |\sin(x)| \le |x|$ b. $\forall x\in[0,\pi/2],\ -x^2 \le \cos x - 1 \le 0$, c. $\forall x > 0,\ \arctan(x) > \frac{x}{1+x^2}$

14.21 Montrer que $f : x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ est contractante sur $\mathbb{R}$.

14.22 Démontrer que $\sqrt[n+1]{n+1} - \sqrt[n]{n} \sim \frac{-\ln(n)}{n^2}$

14.23 Une *inégalité classique* et une *application*.

Démontrer que $\forall x>0$, $\frac{1}{x+1} \le \ln(x+1) - \ln(x) \le \frac{1}{x}$ et en déduire $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=n+1}^{pn} \frac{1}{k}$ où $p\in\mathbb{N}$, $p\ge 2$.

♦ **14.24** Soit f continue sur [a, b] et dérivable sur]a, b[telle que f(a) = f(b).

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe $x_1, \dots, x_n$ appartenant à]a, b[, deux à deux distincts, tels que : $\sum_{j=1}^{n} f'(x_j) = 0$.

14.25 Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}$. Montrer que si $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = \ell$ avec $\ell > 0$ ou $\ell = +\infty$, alors $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

♦ **14.26** Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}$. Montrer que si $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0$ alors $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$

14.27 Soit f :[0, 1]→[0, 1] une fonction dérivable qui vérifie $f\circ f = f$ et qui n'est pas constante.
Montrer que f est l'application identité.
On commencera par montrer que $\forall y\in f([0, 1])$, $f(y) = y$

Extrait de <u>*l'Encyclopédie*</u> de Diderot et d'Alembert (écrite de 1751 à 1772)

Différentielle, adj.
On appelle dans la haute Géométrie, quantité différentielle ou simplement différentielle, une quantité infiniment petite, ou moindre que toute grandeur assignable.
On l'appelle différentielle ou quantité différentielle, parce qu'on la considère ordinairement comme différence infiniment petite de deux quantités finies, dont l'une surpasse l'autre infiniment peu. NEWTON et les anglais l'appellent fluxion, à cause qu'ils la considèrent comme l'accroissement momentané d'une quantité. LEIBNITZ (*) et d'autres l'appellent aussi une quantité infiniment petite.
Calcul différentiel ; c'est la manière de différentier les quantités, c'est-à-dire de trouver la différence infiniment petite d'une quantité finie variable.
Cette méthode est l'une des plus belles et des plus fécondes de toutes les Mathématiques ; M. LEIBNITZ qui l'a publiée le premier, l'appelle calcul différentiel, en considérant les grandeurs infiniment petites comme les différences des quantités finies ; c'est pourquoi il les exprime par la lettre *d* qu'il met au devant de la quantité différentiée ; ainsi la différentielle de *x* est exprimée par *dx*, celle de *y* par *dy*, etc.
M. NEWTON appelle le calcul différentiel, méthode des fluxions, parce qu'il prend, comme on l'a dit, les quantités infiniment petites pour des fluxions ou des accroissements momentanés. Il considère, par exemple, une ligne comme engendrée par la fluxion d'un point, une surface par la fluxion d'une ligne, un solide par la fluxion d'une surface ; et au lieu de la lettre *d*, il marque les fluxions par un point mis au dessus de la grandeur différentiée. Par exemple, pour la fluxion de x, il écrit $\dot{x}$, pour celle de y, $\dot{y}$ etc. C'est ce qui fait la seule différence entre le calcul différentiel et la méthode des fluxions…

(*) L'orthographe moderne est Leibniz.

Convexité :

14.28 ***Des inégalités***

a. Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\forall x\in[-1, +\infty[$, $(1 + x)^n \geq 1 + nx$
b. En utilisant la concavité de ln sur son ensemble de définition, montrer que :
$\forall x,y > 0$, $\forall p, q > 1$, tels que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, $xy \leq \frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q}y^q$
c. Etudier la convexité de la fonction $f : x \mapsto -\ln(\ln x)$ sur son ensemble de définition.
En déduire que $\forall x, y > 1$, $\ln\left(\frac{x+y}{2}\right) \geq \sqrt{\ln(x)\ln(y)}$

14.29 ***Fonctions convexes sur*** $\mathbb{R}$

a. Soit f une fonction convexe sur $\mathbb{R}$. Montrer que si f est majorée alors f est constante.
b. Soit f une fonction convexe et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$. Montrer que si f admet une limite finie en $+\infty$, alors f est décroissante.

♦ **14.30** ***Inégalité arithmético-géométrique***

Etant donné une famille $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$ de n réels strictement positifs, on définit les moyennes arithmétique et géométrique de ces réels par

$$m = \frac{a_1+\cdots+a_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i \text{ et } g = \sqrt[n]{a_1\times\cdots\times a_n} = \left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right)^{\frac{1}{n}}$$

a. Dans cette question, n = 2. Montrer que $m \geq g$
b. En utilisant la concavité de ln sur son ensemble de définition, montrer par récurrence sur n que : $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\ln\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i\right) \geq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln(a_i)$
c. En déduire que, de manière générale, $m \geq g$

Retenons : $\forall a_1, a_2, \ldots, a_n > 0$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$ $\sqrt[n]{a_1\times\cdots\times a_n} \leq \frac{a_1+\cdots+a_n}{n}$