Exercices – Chapitre 16: Polynômes

♦ Corrigé- ♥ A savoir refaire

Définition, degré

♦ **16.1** On pose $H_0 = 1$ et $\forall \in \mathbb{N}$, $H_{n+1} = H_n' - 2XH_n$. Déterminer les polynômes H_1, H_2, H_3 puis le degré et le coefficient dominant de H_n.

♥ **16.2** Justifier que arctan est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, il existe un polynôme T_n de $\mathbb{R}[X]$ tel que $\arctan^{(n)}(x) = \dfrac{T_n(x)}{(1+x^2)^n}$. Préciser le degré de T_n et son coefficient dominant.

16.3 Soit $n \in \mathbb{N}$, déterminer le degré du polynôme $P = (X^2+1)^n - 2X^{2n} + (X^2-1)^n$.

16.4 Déterminer le degré puis les coefficients du polynôme $P_n = \displaystyle\prod_{k=0}^{n}(1 + X^{2^k})$.

16.5 Résoudre dans $\mathbb{C}[X]$ l'équation $P(X^2) = (X^2+1)P(X)$

Algèbre linéaire et polynômes

♥ **16.6** Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(X^k(1-X)^{n-k})_{0 \le k \le n}$ est une famille libre dans $\mathbb{R}[X]$.

16.7 Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \ge 2$ et $E = \mathbb{R}_n[X]$. On considère le polynôme $A = X^2 + 1$
On pose $F = \{ P \in E | A \text{ divise } P \}$.
a. Montrer que F est un SEV de E.
b. Montrer que $E = F \oplus \mathbb{R}_1[X]$
c. Donner une base de F.

16.8 Soit $E = \mathbb{R}_5[X]$, on définit
$F = \{P \in E, P(1) = P'(0) = P(-1) = 0\}$ et $G = \mathrm{Vect}(X^2, X(X+1), (X+1)^2)$.
a. Montrer que F et G sont des SEV de E et en donner une base.
b. Déterminer $F \cap G$. Que peut-on en déduire.

16.9. On note E l'espace vectoriel $\mathbb{K}_n[X]$.

a. Justifier que $\mathcal{F} = (1, (X-1), (X-1)^2, \ldots, (X-1)^n)$ est une base de E.
On pose n = 3, donner les coordonnées dans cette base de $X^3 - 2X^2 + X - 1$.
b. Soit $P \in E$, quelles sont les coordonnées de $Q = P(X+1)$ dans la base canonique de E ?

16.10 On note E l'espace vectoriel $\mathbb{K}_n[X]$.

On pose $P_0 = 2$, $P_1 = X$ et pour tout $k \in [\![0, n-2]\!]$, $P_{k+2} = XP_{k+1} - P_k$
Montrer que la famille $(P_k)_{0 \le k \le n}$ est une base de E

16.11 Soient $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1, 2\}$ et $F = \{ P \in \mathbb{R}_n[X], P(0) = P'(0) = P''(0) \}$.
a) Montrer que F est un espace vectoriel et préciser sa dimension
b) Déterminer un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}_n[X]$.

16.12 Soit $P = X^3 - 2X^2 + 3X - 1$. Donner les coordonnées de P dans les bases suivantes de $\mathbb{R}_3[X]$:
$B_1 = (1, X, X^2, X^3)$, $B_2 = (1, X+1, (X+1)^2, (X+1)^3)$ et $B_3 = (X^3, X^2(X-1), X(X-1)^2, (X-1)^3)$

Division euclidienne

16.13 Effectuer les divisions euclidiennes suivantes:
a. $A = X^5 + X^3 + 2X^2 + X + 1$ par $B = X^3 + X^2 + 1$
b. $A = X^4 + aX^3 + bX + c$ par $B = X^2 + 1$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$.

♥ **16.14** Déterminer le reste des divisions euclidiennes suivantes dans $\mathbb{R}[X]$:
a. $A = X^n$ par $B = X^2 - 3X + 2$ b. $A = X^n$ par $B = X(X-1)^2$ c. $A = X^{2n} + 1$ par $B = X^2 + 1$

16.15 Soit $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer le reste de la division euclidienne de $A = (X-3)^{2n} + (X-2)^n - 2$ par $(X-3)$ puis par $(X-2)^3$ dans $\mathbb{R}[X]$.

♦ **16.16** Soit a et b deux complexes et $P \in \mathbb{C}[X]$, déterminer le reste dans la division euclidienne de P par $(X-a)(X-b)$.

♥ **16.17** ***Une application aux matrices :*** On considère $A = \begin{pmatrix} 8 & -1 & 2 \\ 7 & 0 & 2 \\ -18 & 3 & -4 \end{pmatrix}$.

a. Vérifier que $A^3 - 4A^2 + 5A - 2I_3 = 0_3$.
b. Déterminer le reste dans la division de X^n par $P = X^3 - 4X^2 + 5X - 2$.
c. Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Racines, factorisation

♥ **16.18** Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$, les polynômes
$X^7 - 1$, $X^8 - 1$, $X^3 + 1$, $X^4 + X^2 + 1$ et $X^6 + 1$

16.19 Factoriser $P = X^8 + X^4 + 1$ dans $\mathbb{R}[X]$ de deux méthodes différentes : A l'aide des racines de P puis sans les racines de P

♥ **16.20** On donne $P = X^8 + 2X^6 + 3X^4 + 2X^2 + 1$

a. Montrer que $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ est racine de P et donner son ordre de multiplicité.
b. Que déduire de la parité de P ?
c. Décomposer P dans $\mathbb{R}[X]$.

16.21 Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ puis $\mathbb{R}[X]$
a. $X^4 - 9X^3 + 30X^2 - 44X + 24$ *2 est une racine multiple de P*
b. $X^6 - X^5 + 3X^4 - 2X^3 + 3X^2 - X + 1$
c. $X^{2n} - 2X^n\cos(n\theta) + 1$ avec $n \geq 1$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

♦ **16.22** Montrer que $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ est racine de $P(X) = X^4 + X^3 + 2X^2 + X + 1$.
En déduire la factorisation de P dans $\mathbb{R}$.

♦ **16.23** Trouver une CNS sur l'entier n pour que $X^{2n} + X^n + 1$ soit divisible par $X^2 + X + 1$.

♥ **16.24** ***Un classique*** : Rappeler la factorisation de $X^n - 1$ dans $\mathbb{C}[X]$.
En déduire la factorisation de $P = \sum_{k=0}^{n-1} X^k$ dans $\mathbb{C}[X]$,

puis donner une expression simple du produit $\prod_{k=1}^{n-1} \sin(\frac{k\pi}{n})$.

Dérivation, racines multiples.

♦ **16.25** Résoudre dans $\mathbb{R}[X]$ l'équation $P'^2 = 4P$

16.26 Montrer que $P = nX^{n+2} - (n+2)X^{n+1} + (n+2)X - n$ est divisible par $(X-1)^3$.

16.27 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, $P = \sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k!}$ n'a que des racines simples dans $\mathbb{C}$.

♦ **16.28** Déterminer les polynômes P divisibles par P' dans $\mathbb{K}[X]$.

16.29 Déterminer les polynômes de $\mathbb{C}[X]$ tels que $(X^2+1)P'' - 6P = 0$

16.30 Soit P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ de degré $n \geq 2$.
a. Peut-on dire que si α est racine de P d'ordre de multiplicité m, alors α est racine de P' d'ordre de multiplicité $(m - 1)$?
b. Montrer que si P est scindé alors P' est aussi scindé.

♥ **16.31** Soit P un polynôme de degré n, $n \geq 1$, à coefficients réels possédant n racines réelles distinctes.
a. Montrer que P' possède $(n - 1)$ racines réelles.
b. En déduire que les racines de $Q = P^2 + 1$ sont toutes simples dans $\mathbb{C}$.

Relations entre coefficients et racines

16.32 Soit $n \geq 2$ et $P_n = (X + i)^n - (X - i)^n$

Déterminer les racines de P et en déduire $\alpha_n = \sum_{k=1}^{n-1} \cot an(k\pi / n)$ et $\beta_n = \prod_{k=1}^{n-1} \cot an(k\pi / n)$

16.33 Soit $P = X^3 - 7X^2 + 5X + 2$.

a. Montrer que P admet trois racines réelles x_1, x_2 et x_3 telles que $x_1 < x_2 < x_3$
b. Calculer la valeur de $\sigma_1 = x_1 + x_2 + x_3$, $\sigma_2 = x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3$ et $\sigma = x_1x_2x_3$.
c. En déduire les valeurs de $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}$, $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ et $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$.
d. On note S_p la somme $x_1^p + x_2^p + x_3^p$ où $p \in \mathbb{N}^*$ et $Q = X^p \times P$.
En utilisant que x_1, x_2 et x_3 sont racines de Q, écrire une relation de récurrence entre S_{p+3}, S_{p+2}, S_{p+1} et S_p.

♥ **16.34** Résoudre dans $\mathbb{C}^2$: $\begin{cases} z + w = 3i - 4 \\ zw = -12i \end{cases}$

Famille de polynômes: Remplacer Hermite par Tchebychev

~~**16.35 Polynômes de Hermite**: Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \exp(-\frac{x^2}{2})$.~~

~~1. Montrer que f est de classe C^∞ et que $\forall n \in \mathbb{N}$, il existe $H_n \in \mathbb{R}[X]$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f^{(n)}(x) = (-1)^n H_n(x) f(x)$.~~

~~2. Justifier que $\forall n \in \mathbb{N}$, H_n est de degré n et est unitaire~~

~~3. Justifier que f est solution de l'équation différentielle $y' + xy = 0$ puis en déduire que:~~
~~(1) $H_{n+1} - XH_n + nH_{n-1} = 0$ (2) $H'_n = nH_{n-1}$ (3) $H''_n - XH'_n + nH_n = 0$~~

~~4. Montrer que $\forall n \geq 2$, H_n est scindé que toutes ses racines sont simples et que les racines de H_{n-1} séparent les racines de H_n.~~
~~*C'est à dire qu'entre deux racines successives de H_n on trouve une unique racine de H_{n-1}*~~

16.36 Polynômes interpolateurs de Lagrange
On note E l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$ et on considère $(n + 1)$ réels $a_0 < a_1 < \ldots < a_n$.

a. Montrer, $\forall i \in [\![0, n]\!]$, il existe un unique polynôme L_i de E tel que $L_i(a_j) = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ si } i \neq j \end{cases}$

On pourra commencer par traiter le cas où n =2
b. Montrer que la famille $(L_0, L_1, \ldots, L_n)$ est une base de E et donner les coordonnées de $P \in E$ dans cette base.
c. On donne $A_0, A_1, \ldots, A_n$ (n+1) points distincts du plan, déterminer une fonction polynômiale f de degré au plus n dont la courbe représentative passe pas les points $A_0, A_1, \ldots, A_n$.
d. Expliciter f pour n = 2 et $A_0(-1, 1)$, $A_1(1,2)$ et $A_3(2, -3)$