# Exercices-Chapitre 17: Comparaison locale de fonctions, DL

♦ **Eléments de correction en ligne - ♥ *A savoir refaire.***

## Relation de comparaison

**17.1** Justifier les comparaisons suivantes :

**a.** $f : x \mapsto x^{-\frac{5}{2}} \ln^2(x)$, $g : x \mapsto \dfrac{\sqrt{\ln(x)}}{x^3}$, et $h : x \mapsto e^{-2x}$ sont négligeables devant $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ en $+\infty$

**b.** $f : x \mapsto x\sqrt{|\ln(x)|}$, $g : x \mapsto \dfrac{\ln x}{\sqrt{1-x}}$ sont négligeables devant $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ en 0

**17.2** *VRAI ou FAUX*

**a**. Si $f \underset{a}{\sim} g$ alors $\lim_{x \to a} (f(x) - g(x)) = 0$

**b**. Si $\lim_{x \to a} (f(x) - g(x)) = 0$ alors $f \underset{a}{\sim} g$.

♥ **17.3** Donner un équivalent simple des fonctions suivantes en 0 puis en $+\infty$:

$f(x) = x + \sqrt{x}$  $g(x) = x + 1 + \ln x$  $h(x) = \ln x + (\ln x)^2$  $k(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$  $m(x) = e^x + \sin x$

♥ **17.4** Donner un équivalent simple des fonctions suivantes en 0:

**a.** $f(x) = \tan x \ln^2(1+x)$  $g = \dfrac{\left(e^x - 1\right)^2}{(1+x)^5 - 1}$  $h(t) = \sqrt{\dfrac{sh(t)}{t^2 + t}}$

**b.** $f(x) = \ln(1 + \sin x)$  $g(t) = \ln(\cos t)$  $h(x) = \dfrac{\tan(2x^2)}{\sqrt{1-x^2} - 1}$

♥ **17.5** Donner un équivalent simple des fonctions suivantes en $+\infty$:

**a.** $f(x) = \dfrac{x^3 + 2x^4 - x^2}{(x^2 + x)^3}$  $g(x) = x\left(e^{\frac{1}{x^2}} - 1\right)$  $h(x) = x^4\sqrt{1 + \dfrac{1}{x^2}} - x^4$

**b.** $f(x) = x^{\frac{1}{x}} - 1$  $g(x) = e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x+1}}$  $h(x) = ch(x)$

**17.6** *Règle du logarithme*

a. Démontrer que: si $u \underset{a}{\sim} v$ et si $\lim_{x \to a} u(x) = \ell$ avec $\ell \in \mathbb{R}_+, \ell \neq 1$ ou $\ell = +\infty$ alors $\ln \circ u \underset{a}{\sim} \ln \circ v$

b. Donner un équivalent simple en 0 de $f(x) = \ln(\ln(x + 1))$ et de $g(x) = \ln(\sin x)$.

c. Donner un équivalent simple en $+\infty$ de $f(x) = \ln(x^2 + x + 1)$ .

♦ **17.7** A l'aide d'un encadrement, donner un équivalent de arctan(x + 1) - arctan(x) en $+\infty$.
*Indic : arctan(x + 1) – arctan(x) = f(a) – f(b)*

**17.8** Pour chaque exemple donner les valeurs du réel $\alpha$ telles que $f(t) \underset{x \to a}{=} o\left(\dfrac{1}{t^{\alpha}}\right)$

a. $f(t) = \ln(1 + t^2)$ avec $a = 0$

b. $f(t) = \ln\left(1 + \dfrac{1}{t^2}\right)$ avec $a = +\infty$

c. $f(t) = \dfrac{\ln^2 t}{\sqrt{t(t^2+1)}}$ avec $a = +\infty$

d. $f(t) = \dfrac{\ln^2 t}{\sqrt{t(t^2+1)}}$ avec $a = 0$

e. $f(t) = t^3 e^{-t}$ avec $a = +\infty$

f. $f(t) = \dfrac{\sin(2t)}{t^2}$ avec $a = 0$

**17.9** Donner un équivalent simple en $\pi/2$ de cos et de $f(x) = \dfrac{1}{\cos x} - \tan x$

***Utilisation dans les problèmes***

♥ **17.10** Déterminer la limite de f en a à l'aide d'équivalents:

a. $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}$, $a=0$ b. $f(x)=\dfrac{\cos x}{\sin x-1}$, $a=\dfrac{\pi}{2}$ c. $f(x)=\dfrac{1}{x}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$, $a=0$

d. $f(x)=\left(1-e^{-x}\right)^{2x^2}$, $a=+\infty$ e. $f(x)=x^{\frac{1}{x-1}}$, $a=1$ f. $f(x)=\dfrac{\ln(1+2\tan x)}{\sin x}$, $a=0$

♦ **17.11** Même exercice :

a. $f(x)=$ , $a=0$ b. $f(x)=\tan x\tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$, $a=\pi$ c. $f(x)=\dfrac{1-e^x}{1-2^x}(1-\cos x)$, $a=0$

d. $f(x)=\left(\dfrac{1-x+x^2}{1+x+x^2}\right)^{1/x}$, $a=0$ e. $f(x)=\dfrac{\tan x}{\sqrt{1+\sin x}-1}$, $a=0$ f. $f(x)=\left(\dfrac{\ln(1+x)}{\ln x}\right)^{x\ln x}$, $a=+\infty$

**17.12** Donner l'ensemble de définition de la fonction définie par $f(x)=\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^{\ln x}$, et étudier sa continuité sur cet ensemble. Peut-on la prolonger par continuité ?

♦ **17.13** Soit a, b > 0. Déterminer la limite en $+\infty$ de $f(x)=\left(a^x+b^x\right)^{\frac{1}{x}}$

---

***Calculs de DL***

♥ **17.14 Opérations algébriques et composition**

a. $DL_4(0)$ de: $2\mathrm{ch}(x) - 3\sqrt{1+x}$, $e^x\ln(1+x)$, $\dfrac{\tan x-\sin x}{1+x}$.

b. $DL_4(0)$ de: $\ln(1+\sin x)$, $\cos(x\sqrt{1+x})$, $e^{\cos x}$

c. $DL_2(0)$ de: $\left(\sqrt{1+x}\right)^x$ et $\sqrt{1+\sqrt{1+x}}$

♥ **17.15 Quotient:**

a. $DL_3(0)$ de: $\dfrac{1}{1+x+x^3}$, $\dfrac{1+x}{3+x^2}$, $\dfrac{\arctan(x)-\sin x}{\cos x}$

b. $DL_3(0)$ $\dfrac{x}{\ln(1+x)}$, $\dfrac{\ln(1+x)}{\sin x}$.

♥ **17.16 Intégration**:

a. $DL_4(0)$ de arcsinx et de ln(cosx)

b. Montrer que $\forall a>0$, $x\mapsto\arctan(\dfrac{a+x}{1-ax})$ admet un DL à tout ordre en 0 et le déterminer.

♦ **17.17** Donner les $DL_3(0)$ de :

$\dfrac{x^2}{\ln(1+x^2)}$, $\dfrac{\ln^2(1+x)}{e^x-1}$, $\ln(\dfrac{x^2+1}{x+1})$, $\dfrac{1}{\mathrm{th}x}-\dfrac{1}{\tan x}$, $(x+1)^{\frac{1}{x}}$ et $\ln(3e^x+e^{-x})$

**17.18** Donner un DL à l'ordre n en a dans les cas suivants

sinx en a = $\dfrac{\pi}{3}$, n = 3  $e^x$ en a = 1 et $n\in\mathbb{N}$  $\dfrac{\ln x}{x^2}$ en a = 1, n = 3  arctanx en a = 1, n = 3

**17.19** ***D'autres méthodes pour donner le $DL_5(0)$ de la fonction tangente.***

**a.** Justifier que tangente admet un $DL_5(0)$ et le retrouver en utilisant cosx.tanx = sinx

**b.** En utilisant que: $\forall x\in\mathbb{R}$, tan(arctan(x)) = x, retrouver le $DL_5(0)$ de la fonction tangente.

♦ **17.20** Utiliser une méthode analogue à la précédente pour retrouver le $DL_5(0)$ de arcsin.

♥ **17.21** Soit la fonction f définie sur ℝ par $f(x) = \begin{cases} \exp(-\frac{1}{x^2}) \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$

Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur ℝ et que $\forall n \in \mathbb{N}$ $f^{(n)}(0) = 0$ et donner son $DL_n(0)$ en 0.

**Vrai ou Faux:** Deux fonction admettant le même DL d'ordre n en a sont égales au voisinage de a.

♦ **17.22** Soit f définie sur ℝ par $f(x) = \arctan(e^x)$.

a. Justifier que f admet un DL à tout ordre en 0.

b. On souhaite obtenir le $DL_3(0)$ de f. Peut-on composer les $DL_3(0)$ de arctanx et $e^x$?

c. Justifier que f est solution sur ℝ de l'équation différentielle $(1 + e^{2x})\, y' = e^x$.

d. En déduire les valeurs de f'(0), f''(0) et enfin f'''(0).

e. Donner le $DL_3(0)$ de f.

**17.23** Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x\exp(x^2)$.

1. Montrer que f est bijective de ℝ dans ℝ. On note $f^{-1}$ sa bijection réciproque.

2.a. Quelle est la régularité de $f^{-1}$ sur ℝ ? Quelle est sa parité ?

2.b. Calculer le $DL_5(0)$ de $f^{-1}$. *Indic : exercice 17.20*

---

**Utilisation des DL dans les problèmes**

**17.24** Donner un **équivalent simple** des fonctions suivantes en 0 :

$f(x) = \ln(1 + \sin x) - \tan x$ $\quad g(x) = \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}$ $\quad h(x) = \sin^2 x - x^2\sqrt{1-x^2}$

**17.25** Calculer les **limites** des fonctions suivantes en 0

$f(x) = \frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x}$ $\quad g(x) = \frac{1}{\sin^4 x}\left[\sin\left(\frac{x}{x+1}\right) - \frac{\sin x}{1+\sin x}\right]$ $\quad h(x) = \left(\frac{e^x - 1}{x}\right)^{\frac{1}{e^x - 1}}$

**17.26 Etude locale d'une fonction**

a. On définit f par $\forall x \in ]-1, 0[ \cup ]0, +\infty[$ par $f(x) = \frac{\ln(1+x) - x}{x^2}$.

Montrer que f peut être prolongée par continuité en 0, étudier la dérivabilité du prolongement et préciser l'allure de la courbe représentative de f au voisinage du point d'abscisse 0.

b. On pose $\forall t \neq 0$, $f(t) = \frac{\arctan t}{t}$ et f(0) = 1. On considère $\phi : x \mapsto \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt$.

Justifier que $\phi$ est bien définie sur $\mathbb{R}^*$ puis montrer qu'elle peut être prolongée en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur ℝ

♦ **17.27 Calcul de dérivées successives** Soit $f(x) = \frac{\ln(\cos x)}{1+x}$, justifier que f est 5 fois dérivable en 0 et calculer les 5 dérivées premières en 0.

**17.28 Branches infinies :**

En posant $h = \frac{1}{x}$, étudier les branches infinies de la fonction $f(x) = \frac{x^2}{x-1}e^{\frac{1}{x}}$