

Exercices - Chapitre 19: Représentations matricielles

♦ Éléments de correction en ligne - ♥ A savoir refaire

Matrice d'une application linéaire.

♥ 19.1 Dans chacun des cas suivants, u est une application linéaire de E dans F . Donner la matrice de u relativement aux bases canoniques de E et F .

- a. $E = \mathbb{R}^3$, $F = \mathbb{R}^4$ et $u:(x, y, z) \mapsto (x + y - 2z, x - 3y + z)$
- b. $E = \mathbb{C}^3$, $F = \mathbb{C}^4$ et $u:(x, y, z) \mapsto (2ix + 3z, x - y, iy + 2z, x - 2y + iz)$
- c. $E = \mathbb{R}^3$, $F = \mathbb{R}^3$ et $u:(x, y, z) \mapsto (x + y + z, x - 2y, 3y - z)$
- d. $E = F = \mathbb{R}_3[X]$, $u:P \mapsto P''$

e. $E = F = \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$, $u:M \mapsto AM$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

f. $E = \mathbb{R}_n[X]$, $F = \mathbb{R}^2$, $P \mapsto (P(1), P'(1))$

19.2 Dans $\mathbb{R}[X]$, on pose $Q = 1 + X + X^2$ et on définit ϕ sur $\mathbb{R}_3[X]$ par $\forall P \in \mathbb{R}_3[X]$, $\phi(P) = PQ' - QP'$

- a. Montrer que $\phi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_3[X], \mathbb{R}_4[X])$
- b. Ecrire la matrice de ϕ dans les bases canoniques de $\mathbb{R}_3[X]$ et de $\mathbb{R}_4[X]$.
- c. Déterminer le noyau de ϕ et le rang de ϕ . Que peut-on en déduire ?

♥ 19.3 Un automorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$

- a. Justifier que $\mathcal{B} = (1, X - 2, (X - 2)^2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

b. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ dont la matrice relativement à la base $\mathcal{B}$ est $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Déterminer $f(X^2 + X + 1)$.

- c. Montrer que f est un automorphisme et préciser la matrice de f^{-1} dans $\mathcal{B}$.

♥ 19.4 Soit l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par $f(x, y, z) = (x - z, y, y)$.

Déterminer la matrice de f dans la base canonique, puis expliciter les itérées successives de f .

♥ 19.5 Dérivation discrète: Soit $P \in \mathbb{K}_n[X]$, on pose $u(P) = P(X+1) - P(X)$

- a. Montrer que u est un endomorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$.
 - b. Donner la matrice A de u dans la base canonique pour $n = 3$ et en déduire, $\text{rg}(u)$, $\text{Im } u$ et $\text{Ker } u$
 - c. On revient au cas général, déterminer le noyau, le rang et l'image de u .
- A-t-on $\text{Ker } u$ et $\text{Im } u$ supplémentaires dans $\mathbb{K}_n[X]$?

d. On définit à présent $f : \begin{cases} \mathbb{K}[X] \rightarrow \mathbb{K}[X] \\ P \mapsto P(X+1) - P(X) \end{cases}$. Justifier que f est un endomorphisme surjectif.

♥ 19.6 Endomorphismes nilpotents en dimension finie

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $u \in \mathcal{L}(E)$ avec u nilpotent d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ c'est à dire tel que:

$u^n = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et u^{n-1} n'est pas l'application nulle. Soit $x_0 \in E$ tel que $u^{n-1}(x_0) \neq 0$.

- a. Justifier que $\mathcal{B} = (x_0, u(x_0), \dots, u^{n-1}(x_0))$ est une base de E .
- b. Donner la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$ et en déduire le rang de u .
- c. Préciser $\text{Ker } u$. $\text{Im } u$ et $\text{Ker } u$ sont-ils supplémentaires ?
- d. Dans cette question, $n = 3$. Déterminer l'ensemble F des endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ qui commutent avec u et montrer que F est un SEV de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ de dimension 3.

Prolongation de l'exercice 18.25

Noyau, image, rang, endomorphisme canoniquement associé

♥ 19.7 On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 12 & 6 & 0 \\ -20 & -10 & 0 \\ -6 & -3 & -1 \end{pmatrix}$.

- Donner l'endomorphisme canoniquement associé à A .
- Déterminer $\text{Ker } A$, $\text{rg}(A)$, $\text{Im } A$. A est-elle inversible ?

19.8 On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

et on note f l'endomorphisme canoniquement associé à A .

- Déterminer $\text{Im } A$ et $\text{Ker } A$ et montrer que ce sont deux SEV supplémentaires de $\mathbb{R}^3$.
- Ecrire la matrice de f dans une base adaptée à la décomposition $\text{Ker } A \oplus \text{Im } A = \mathbb{R}^3$.
- Décrire f comme la composée de deux endomorphismes particuliers.

♥ 19.9 Déterminer le rang des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 2 \\ -4 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 7 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & -3 \\ 6 & 3 & -3 & -1 & 7 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}.$$

♥ 19.10 Prouver que la famille composée des vecteurs $P_1 = (X+1)^2$, $P_2 = 1 - X^2$ et $P_3 = X$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

♦ 19.11 Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, donner le rang des familles suivantes

- $\mathcal{F} = ((3, 1, -4, 6), (1, 1, 4, 4), (1, 0, 4, \lambda))$ dans $\mathbb{R}^4$.
- $\mathcal{F} = (P_1, P_2, P_3)$ dans $\mathbb{R}_3[X]$ où $P_1 = 3 + X - X^2 + 6X^3$, $P_2 = 1 + X + 4X^2 + 4X^3$, $P_3 = 1 - 4X^2 + \lambda X^3$.
- $\mathcal{F} = ((1, \cos\lambda, \cos 2\lambda), (\cos\lambda, \cos 2\lambda, \cos 3\lambda), (\cos 2\lambda, \cos 3\lambda, \cos 4\lambda))$ dans $\mathbb{R}^3$

19.12 On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 5 \\ -6 & 4 & 10 \\ 3 & -2 & -5 \end{pmatrix}$.

- Déterminer le rang de A .
- Montrer qu'il existe deux matrices de $\mathbb{R}_{3,1}$ notées U et V qui vérifient : $A = UV^T$.
- Déterminer A^2 puis A^n pour $n \in \mathbb{N}^*$.

19.13 Soit $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$, et $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & a & b \\ c & c & d & d \\ ac & bc & ad & bd \end{pmatrix}$. Donner le rang de A .

19.14 Soit A et B deux matrices carrées d'ordre 3, montrer que $AB = O_3 \Rightarrow \text{rg}(A) \leq 1$ ou $\text{rg}(B) \leq 1$

♥ 19.15 Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$ et f son endomorphisme canoniquement associé.

Justifier que A est inversible, préciser A^{-1} puis A^p pour tout $p \in \mathbb{N}$.

♦ 19.16 Soit $A = (a_{i,j})$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $i \geq j \Rightarrow a_{i,j} = 0$.

Montrer que $A^n = O_n$. On pourra utiliser f , l'endomorphisme canoniquement associée à A .

Changement de base et application

♥ 19.17 Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}. \text{ On pose } e_1 = (1, 1, 1), e_2 = (1, -1, 0) \text{ et } e_3 = (1, 0, 1)$$

- a. Montrer que $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et donner la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$
 b. En déduire une base de $\text{Ker } f$ et de $\text{Im } f$

♥ 19.18 **Matrice d'un projecteur, d'une symétrie.**

Soit $E = \mathbb{R}^3$. On considère : $e_1 = (1, 0, 1)$, $e_2 = (1, -1, 0)$ et $e_3 = (1, 1, 1)$.

- a. Montrer que $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de E . Donner les matrices de passages entre $\mathcal{B}$ et la base canonique.
 b. Donner la matrice, dans la base $\mathcal{B}$ puis dans la base canonique, de la projection sur $F = \text{Vect}(e_1, e_2)$ parallèlement à $G = \text{Vect}(e_3)$.
 c. Donner la matrice, dans la base $\mathcal{B}$ puis dans la base canonique de E , de la symétrie par rapport à $G = \text{Vect}(e_3)$, parallèlement à $F = \text{Vect}(e_1, e_2)$.

♥ 19.19 Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

- a. Déterminer les réels λ tels que $\exists \vec{u} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}, f(\vec{u}) = \lambda \vec{u}$.
 On dit que λ est une **valeur propre** de f .
 b. Déterminer une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice représentative de f est diagonale.
 c. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, calculer A^n .

19.20 Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ et f son endomorphisme canoniquement associé.

- a. Calculer A^2 , qu'en déduire pour f ?
 b. Montrer que A est semblable à une matrice diagonale.

19.21 Soit $J = \begin{pmatrix} j & j^2 & 1 \\ j^2 & 1 & j \\ 1 & j & j^2 \end{pmatrix}$ avec $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

Calculer J^2 et donner le rang de J puis montrer que J est semblable à $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

19.22 Soit E un $\mathbb{R}$ -EV de dimension 4 et f un endomorphisme de E tel que $f \neq 0$ et $f^2 = 0$

- a. Montrer que $\text{Im } f \subset \text{Ker } f$ et en déduire que le rang de f vaut 1 ou 2.

b. Montrer que si $\text{rg } f = 1$, alors il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que : $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

c. Montrer que si $\text{rg } f = 2$, alors il existe une base $\mathcal{B}'$ de E telle que : $\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$