

Programme de colles-semaine 27 - 12/05 au 16/05

I. Applications linéaires*Programme précédent***II. Représentations matricielles**

- Matrice représentative d'un vecteur de E , d'une famille de vecteurs, isomorphisme entre les familles de cardinal p dans un espace de dimension n et les matrices $n \times p$ une fois une base fixée.
- Famille échelonnée de $\mathbb{R}^n$.
- Matrice représentative d'une application linéaire, isomorphisme entre $\mathcal{L}(E, F)$ avec $\dim E = p$ et $\dim F = n$ et les matrices $n \times p$, une fois les bases fixées.
- Utilisation du produit matriciel pour le calcul de l'image d'un vecteur par une application linéaire, pour le calcul de la matrice d'une composée de deux applications linéaires, matrice d'un isomorphisme.
- Application linéaire f canoniquement associée à une matrice, noyau, image et rang d'une matrice défini comme le noyau, l'image et le rang de f . Propriétés immédiates : $\text{rg}(A) \leq \min(n, p)$, $\text{rg}(AB) \leq \min(\text{rg}(A), \text{rg}(B))$, invariance du rang par multiplication à droite ou à gauche par une matrice inversible
- Théorème du rang pour les matrices. Les OEC préservent $\text{Im } A$ et les OEL préservent $\text{Ker } A$ donc les OEL/OEC conservent le rang de A , calcul pratique du rang.
- Caractérisation des matrices inversibles : $A \in GL_n(\mathbb{K}) \Leftrightarrow \text{rg}(A) = n$

Déroulement de la colle:

① Donner la matrice d'une application linéaire.

② Une question de cours parmi les suivantes

- Donner la définition d'un projecteur de E et montrer que si p est un projecteur de E alors $E = \text{Ker } p \oplus \text{Im } p$
- Énoncé et preuve du lemme du rang : Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et H un supplémentaire de $\text{Ker } f$ dans E .

L'application $\varphi : \begin{cases} H \rightarrow \text{Im } f \\ \vec{x} \mapsto f(\vec{x}) \end{cases}$ est un isomorphisme.

- Déterminer le rang, l'image et le noyau d'une matrice A via des OEL ou des OEC et en déduire des propriétés. *La matrice peut contenir des paramètres.*

③ Exercices d'algèbre linéaires

Prévisions : Représentations matricielles, changement de base.