Exercices - Chapitre 20: ensembles finis, dénombrement.

♥ Exercice à savoir refaire.

Ensembles finis

♥ 20.1 Soit $E = [\![1, 10]\!]$ et $F = [\![1, 20]\!]$.
a. Quel est le nombre d'applications de E dans F ?
b. Quel est le nombre d'injections de E dans F ?
c. Quel est le nombre d'applications strictement croissantes de E dans F ?

20.2 Applications surjectives.
Pour $(n, p)\in(\mathbb{N}^*)^2$, on désigne par $S(p, n)$ le nombre de surjections de $[\![1, p]\!]$ sur $[\![1, n]\!]$.
1. Pour $n > p \geq 1$, déterminer $S(p, n)$.
2. Pour $p\in\mathbb{N}^*$, déterminer $S(p, p)$, $S(p, 1)$ et $S(p, 2)$.
3. Pour $p\in\mathbb{N}^*$, déterminer $S(p + 1, p)$.

20.3 Soit E un ensemble fini de cardinal n.
a. Dénombrer les couples (A,B) de $\mathcal{P}(E)$ tels que $A\subset B$.
b. Dénombrer les couples (A,B) de $\mathcal{P}(E)$ tels que $A\not\subset B$ et $B\not\subset A$.

Preuves combinatoires

♥ 20.4 Dans un jeu de 32 cartes, on considère une main de 16 cartes. Combien y-a-t-il de mains contenant exactement 3 rouges ? Exactement k rouges avec $0 \leq k \leq 16$.

S'inspirer de ce calcul pour démontrer que $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$

♥ 20.5 *Formule de Vandermonde.*
Soit k, n et m trois entiers naturels tels que $k \leq n + m$. On considère A et B deux ensembles disjoints de cardinal respectif n et m, en dénombrant les parties de $E = A\cup B$ de cardinal k de deux manières différentes, établir que : $\displaystyle\sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i}\binom{m}{k-i} = \binom{n+m}{k}$

Dénombrer dans la pratique

♥ 20.6 *p-listes, p-arrangements ou p-combinaison ?*

1. Quel est le nombre de codes possibles pour une carte bleue ?
2. Au loto, on tire au hasard 6 boules parmi 49. Combien de tirages différents peut-on obtenir ?
3. Au tiercé, une course de chevaux comporte 20 partants. Combien peut-il y avoir de résultats possibles de tiercés dans l'ordre ?
4. Un porte manteau comporte 5 patères. De combien de façons peut-on y accrocher 3 manteaux différents ? (avec au plus un manteau par patère).
5. Une urne contient 10 boules numérotées de 1 à 10. On en tire simultanément 3. Combien de tirages différents peut-on obtenir ?
6. Une urne contient 10 boules numérotées de 1 à 10. On en tire successivement 3 sans remise. Combien de tirages différents peut-on obtenir ?
7. Combien pièces contient un jeu de dominos?
8.a. Quel est le nombre de façon de choisir 2 délégués dans la classe de PCSI2?
8.b. Quel est le nombre de façon de choisir 2 délégués dans la classe de PCSI2 si l'on impose un garçon et une fille ?
9. Quel est le nombre de plaques minéralogiques possibles ?
Une plaque minéralogique est composée de « 2 lettres – 3 chiffres – 2 lettres »
10. Quel est le nombre de plaques minéralogiques possibles dont tous les chiffres et les lettre sont deux à deux distincts ?

11. Combien de menus différents peut-on composer si on a le choix entre 3 entrées, 2 plats et 4 desserts ?
12. Un QCM, autorisant une seule réponse par question, comprend 15 questions qui ont chacune 4 réponses possibles. De combien de façons peut-on répondre à ce questionnaire ?

♥ **20.7** Soit E l'ensemble des nombres à 6 chiffres ne comportant aucun « 0 ».
1. Déterminer le cardinal de l'ensemble E.
2. Soit E_1 l'ensemble des nombres de E ayant six chiffres différents. Déterminer le cardinal de l'ensemble E_1.
3. Soit E_2 l'ensemble des nombres pairs de E. Déterminer le cardinal de l'ensemble E_2.
4. Soit E_3 l'ensemble des nombres de E dont les chiffres forment une suite strictement croissante (dans l'ordre où ils sont écrits). Déterminer le cardinal de l'ensemble E_3.

♥ **20.8** Combien y a –t-il de d'entiers qui s'écrivent exactement avec n chiffres significatifs avec $n \geq 3$, et dont exactement deux chiffres 8 ?

♥ **20.9** ***Le pouilleux*** : on rappelle qu'un jeu de 52 cartes contient 13 cartes de 4 couleurs différentes : pique, cœur, carreaux et trèfle, ainsi que 3 figures : roi, dame et valet à chaque couleur. On appelle main une partie extraite du jeu.
a. Déterminer le nombre de mains de 8 cartes.
b. Combien de ces mains contiennent le valet de pique ?
c. Combien de ces mains contiennent au moins un valet ?
d. Combien de ces mains contiennent au moins un valet et un pique?
e. Combien de ces mains contiennent exactement 3 piques dont le valet.
f. Combien de ces mains contiennent exactement 3 piques et deux valets ?

20.10 Une urne contient des boules de deux couleurs : blanches et noires.
On tire successivement 5 fois une boule, en remettant la boule tirée après chaque tirage et on note les couleurs obtenues.
a. Combien a-t-on de résultats différents ?
b. Combien de résultats avec au moins deux boules de couleurs différentes ?
c. Combien de résultats avec deux boules blanches et 3 noires ?
d. Combien de résultats avec au plus deux boules noires ?
e. Combien de résultats avec une boule blanche en dernier ?

20.11 Dans une classe de 30 élèves, 12 étudient l'anglais, 15 étudient l'allemand, 18 étudient l'espagnol, 6 étudient l'anglais et l'allemand, 7 l'allemand et l'espagnol, 8 l'espagnol et l'anglais. Combien d'élèves étudient les trois langues ?

20.12 ***Nombre de solutions de $x_1+x_2+...x_p = n$***
a. Déterminer le nombre de solution de l'équation $x + y = n$ dans $\mathbb{N}^2$.
b. Déterminer le nombre de solutions de l'équation $x + y + z = n$ dans $\mathbb{N}^3$.
c. On décide du codage suivant : le mot binaire 00100010 code l'égalité 2+3+1 = 6 donnant une solution de $x + y + z = 6$ dans $\mathbb{N}^3$.
Retrouver le résultat de la question b. en utilisant cette représentation des solutions.
d. Déterminer le nombre de solutions de $x_1 + x_2 + ...x_p = n$ dans $\mathbb{N}^p$
e. Déterminer le nombre de solutions de $x_1 + x_2 + ...x_p = n$ dans $(\mathbb{N}^*)^p$

Une application Soit $E = [\![1, p]\!]$ et $F = [\![1, n]\!]$. On veut déterminer le nombre d'applications croissante de E dans F. On pose x_k le nombre d'antécédents de $k \in [\![1, n]\!]$ par f.
Quelle égalité vérifie les entiers $(x_k)_{1k})_{1\leq k\leq n}$? Conclure.

Exercices supplémentaires pour préparer la colle

Tous les exercices sont corrigés

20.13 Démontrer par des méthodes combinatoires que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}$

On pourra s'intéresser à $\sum_{A \in \mathcal{P}(E)} \mathrm{card}(A)$

20.14 Prouver que $\forall (p, q) \in \mathbb{N}^2$, $\sum_{k=0}^{q} \binom{p+k}{p} = \binom{p+q+1}{p+1}$

On pourra s'intéresser à différentes façons de compter le nombre de parties à (p+1) éléments de $[\![0, p+q]\!]$

20.15 Dans une classe de 30 élèves, 12 étudient l'anglais, 15 étudient l'allemand, 18 étudient l'espagnol, 6 étudient l'anglais et l'allemand, 7 l'allemand et l'espagnol, 8 l'espagnol et l'anglais. Combien d'élèves étudient les trois langues ?

20.16 Soit E un ensemble fini à n éléments où $n \in \mathbb{N}^*$. On considère A une partie de E à p éléments.

a. Soit $k \in \mathbb{N}^*$, avec $k \leq n$. Combien de parties de E à k éléments contiennent exactement un élément de A ?

b. Soit $k \in \mathbb{N}^*$ avec $k \leq n$. Combien de parties de E à k éléments contiennent au moins un élément de A ?

20.17 Combien un village doit-il avoir d'habitants au minimum pour que deux personnes au moins aient les mêmes initiales ? *Rq. On ne prend pas en compte les noms ou les prénoms composés.*

20.18 Soit n un entier naturel tel que $n \geq 3$. Quel est le nombre de diagonales d'un polygone convexe à n cotés ?

20.19 Quatre garçons et deux filles s'assoient sur un banc.

a. Quel est le nombre de dispositions possibles ?

b. Même question si les garçons sont d'un côté et les filles de l'autre.

c. Même question si chaque fille est intercalée entre 2 garçons.

d. Même question si les filles veulent rester l'une à côté de l'autre.

20.20 Soit E l'ensemble des nombres à 6 chiffres ne comportant aucun « 0 ».

a. Déterminer le cardinal de l'ensemble E.

b. Soit E_1 l'ensemble des nombres de E ayant six chiffres différents. Déterminer le cardinal de l'ensemble E_1.

c. Soit E_2 l'ensemble des nombres pairs de E. Déterminer le cardinal de l'ensemble E_2.

d. Soit E_3 l'ensemble des nombres de E dont les chiffres forment une suite strictement croissante (dans l'ordre où ils sont écrits). Déterminer le cardinal de l'ensemble E_3.

20.21 On jette 51 miettes sur une table carrée de 1m de côté. Montrer qu'il y a toujours au moins un triangle formé par 3 miettes dont l'aire vaut au plus 200cm^2.
