

Programme de colles-semaine 28 - 19/05 au 23/05

I. Représentations matricielles

Programme précédent

- Matrice de passage d'une base $\mathcal{B}$ à une base $\mathcal{B}'$, définition et propriété.
- Formule de changement de base pour les vecteurs, les applications linéaires et les endomorphismes.
- Matrice semblable : définition, deux matrices semblables ont le même rang, Si A et B sont semblables, leurs puissances le sont aussi.
- Matrice d'un système linéaire, cohérence entre les différentes notions de rang.

II. Dénombrement

- Ensembles finis : définition d'un ensemble fini et de son cardinal, soit E un ensemble fini et F un ensemble, E et F sont en bijection ssi F est fini et $\text{card}(F) = \text{card}(E)$.
 - Cardinal d'une partie. Si A et B sont deux parties disjointes de E alors $\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B)$, généralisation à une famille de parties disjointes, partition de E , formule de Poincaré. (formule du crible HP vue pour la réunion de 3 parties). Preuve de $\text{card}(\mathcal{P}(E)) = 2^n$ par récurrence.
 - Cardinal du produit cartésien de p ensembles finis
 - Soit E fini, si il existe une injection de E dans F alors $\text{card}(E) = \text{card}(f(E)) \leq \text{card}(F)$, principe de Dirichlet.
si il existe une surjection de E sur F alors $\text{card}(E) \geq \text{card}(F)$,
 - Si E et F sont finis de même cardinal alors f bijective $\Leftrightarrow f$ injective $\Leftrightarrow f$ surjective
 - Notion de p -listes, si E est de cardinal n , le nombre de p -listes de E est n^p .
- Le nombre d'application de E de cardinal p dans F de cardinal n est n^p

- Notion de p -arrangements, si E est de cardinal n , le nombre de p -arrangements de E est $\frac{n!}{(n-p)!}$.

Le nombre d'injections de E de cardinal p dans F de cardinal n

- Notion de permutation, si E est de cardinal n , le nombre de permutations de E est $n!$

Le nombre de bijection de E sur F de cardinal commun n est $n!$

- Notion de p -combinaison, le nombre de p -combinaison de E est $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$

Preuves combinatoires des propriétés des entiers $\binom{n}{p}$; Preuve de $\text{card}(\mathcal{P}(E)) = 2^n$ en utilisant une partition.

- Exemples de calcul de nombre d'anagrammes
-

Déroulement de la colle:

① Une question de cours parmi les suivantes

- Calcul du rang d'une matrice sur un exemple en dimension 3 ou 4 avec ou sans paramètre.
- Enoncer et justifier la formule de changement de base pour un endomorphisme.
- Preuve de $\text{card}(\mathcal{P}(E)) = 2^n$ par récurrence.

② Un exercice très simple de dénombrement utilisant des listes, des arrangements, des permutations, des combinaisons ou des anagrammes.

③ Exercice d'algèbre linéaire basé sur les changements de base, les matrices semblables. (Il ne manque que les déterminants).

Prévisions : Probabilités.