Programme de colles-semaine 29/30 – 26/05 au 05/06

I. Représentations matricielles

Programme précédent

- Matrice de passage d'une base $\mathcal{B}$ à une base $\mathcal{B}'$, définition et propriété.
- Formule de changement de base pour les vecteurs, les applications linéaires et les endomorphismes.
- Matrice semblable : définition, deux matrices semblables ont le même rang, Si A et B sont semblables, leurs puissances le sont aussi.
- Matrice d'un système linéaire, cohérence entre les différentes notions de rang.

II. Dénombrement

- Ensembles finis : définition d'un ensemble fini et de son cardinal, soit E un ensemble fini et F une ensemble, E et F sont en bijection ssi F est fini et card(F) = card(E).
- Cardinal d'une partie. Si A et B sont deux parties disjointes de E alors card($A\cup B$) = card(A) + card(B), généralisation à une famille de parties disjointes, partition de E, formule de Poincaré. (formule du crible HP vue pour la réunion de 3 parties). Preuve de card($\mathcal{P}$(E)) = 2^n par récurrence.
- Cardinal du produit cartésien de p ensembles finis
- Soit E fini, si il existe une injection de E dans F alors card(E) = card(f(E)) $\leq$ card(F), principe de Dirichlet.
  si il existe une surjection de E sur F alors card(E) $\geq$ card(F),
- Si E et F sont finis de même cardinal alors f bijective $\Leftrightarrow$ f injective $\Leftrightarrow$ f surjective
- Notion de p-listes, si E est de cardinal n, le nombre de p-listes de E est n^p.

Le nombre d'application de E de cardinal p dans F de cardinal n est n^p

- Notion de p-arrangements, si E est de cardinal n, le nombre de p-arrangements de E est $\dfrac{n!}{(n-p)!}$.

Le nombre d'injections de E de cardinal p dans F de cardinal n

- Notion de permutation, si E est de cardinal n, le nombre de permutations de E est n !

Le nombre de bijection de E sur F de cardinal commun n est n !

- Notion de p-combinaison, le nombre de p-combinaison de E est $\dbinom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$

Preuves combinatoires des propriétés des entiers $\dbinom{n}{p}$, Preuve de card($\mathcal{P}$(E)) = 2^n en utilisant une partition.

- Exemples de calcul de nombre d'anagrammes

III. Probabilité sur un univers fini

- Expérience aléatoire, univers probabilisable (Ω, $\mathcal{P}(\Omega)$) associé (cette année Ω est fini), vocabulaire, événements et notation ensemblistes des événements A et B, A ou B, A mais pas B, le contraire de A, événements disjoints. Système complet d'événements, exemples.
- Une probabilité sur Ω est une application de $\mathcal{P}(\Omega)$ dans [0,1] vérifiant : $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ et si A et B sont disjoints,

$\mathbb{P}(A\cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$. Propriétés de calcul ;

- Soit $(p_1,..p_n)$ une famille de n réels positifs de somme 1, il existe une unique probabilité $\mathbb{P}$ sur

$\Omega = \{\omega_1,...,\omega_n\}$ telle que $\forall i\in[\![1,n]\!]$, $\mathbb{P}(\{\omega_i\}) = p_i$ et $\forall A\in\mathcal{P}(\Omega)$, $\mathbb{P}(A) = \displaystyle\sum_{\omega\in A}\mathbb{P}(\omega)$

- Définition de la probabilité uniforme sur Ω et mode de calcul de $\mathbb{P}(A)$ dans ce cas particulier.
- Soit (Ω, $\mathcal{P}(\Omega)$, $\mathbb{P}$) un espace probabilisé et $B\in\mathcal{P}(\Omega)$ tel que $\mathbb{P}(B) > 0$, $\mathbb{P}_B : A \mapsto \dfrac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)}$ est une probabilité sur Ω

appelée probabilité sachant B.

- formule des probabilités composées, formules des probabilités totales, formules de Bayes.
- Indépendance de deux événements, famille d'événements mutuellement indépendants.

Déroulement de la colle:

① Une question de cours parmi les suivantes

- Enoncer et justifier la formule de changement de base pour un endomorphisme.
- Preuve de card($\mathcal{P}$(E)) = 2^n par récurrence.
- Enoncer la formule des probabilités composées avec toutes ses hypothèses et proposer un exemple d'application.
- Enoncer la formule des probabilités totales avec toutes ses hypothèses et proposer un exemple d'application.

② Deux exercices sur deux thèmes différents du programme de colle :
Semaine du 26 mai : Algèbre linéaire et dénombrement.
Semaine du 02 juin : Au choix du colleur