Programme de colles-semaine 31 – 09/06 au 13/06

I. Probabilité sur un univers fini

• Expérience aléatoire, univers probabilisable $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ associé (cette année Ω est fini), vocabulaire, événements et notation ensemblistes des événements A et B, A ou B, A mais pas B, le contraire de A, événements disjoints. Système complet d'événements, exemples.
• Une probabilité sur Ω est une application de $\mathcal{P}(\Omega)$ dans [0,1] vérifiant : $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ et si A et B sont disjoints, $\mathbb{P}(A\cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$. Propriétés de calcul ;
• Soit $(p_1,..p_n)$ une famille de n réels positifs de somme 1, il existe une unique probabilité $\mathbb{P}$ sur $\Omega = \{\omega_1,...,\omega_n\}$ telle que $\forall i\in[\![1,n]\!]$, $\mathbb{P}(\{\omega_i\}) = p_i$ et $\forall A\in\mathcal{P}(\Omega)$, $\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega\in A}\mathbb{P}(\omega)$
• Définition de la probabilité uniforme sur Ω et mode de calcul de $\mathbb{P}(A)$ dans ce cas particulier.
• Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $B\in\mathcal{P}(\Omega)$ tel que $\mathbb{P}(B) > 0$, $\mathbb{P}_B : A \mapsto \dfrac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)}$ est une probabilité sur Ω appelée probabilité sachant B.
• formule des probabilités composées, formules des probabilités totales, formules de Bayes.
• Indépendance de deux événements, famille d'événements mutuellement indépendants.

II. Variables aléatoires

• Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ un espace probabilisable fini, une variable aléatoire sur Ω est une application de Ω dans un ensemble E. $X(\Omega)$ est l'ensemble fini des valeurs prises par X. On note $(X\in A)$ l'événement $X^{-1}(A)$ pour toute partie de A et plus particulièrement $(X = k)$ si $A = \{k\}$
• Loi d'une variable aléatoire, lois usuelles : loi certaine, loi uniforme, loi de Bernoulli, loi binomiale.
• Opérations sur les va réelles, composition par une fonction définie sur $X(\Omega)$, loi de $Y = f(X)$.
• Loi conditionnelle sachant A avec $P(A) > 0$,.
• Couple de variables aléatoire, loi conjointe et loi marginale, loi de $f(X,Y)$, exemple de la somme.
• Famille de n variables aléatoires, variables aléatoires indépendantes. Lemme des coalitions, application à la loi de la somme de n variables de Bernoulli iid.
• Espérance d'une variable aléatoire, différentes écritures, linéarité, positivité, croissance, théorème de transfert. Si X et Y sont ind alors $E(XY) = E(X)E(Y)$.
• Variance et écart-type d'une variable aléatoire, formule de Koenig-Huygens, propriétés.
• Espérance et variance des lois usuelles.
• Covariance de deux VA, définition, $V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2Cov(X,Y)$.
• Inégalité de Markov et de Bienaymé Tchebychev, loi faible des grands nombres.

Déroulement de la colle:

① Deux questions de cours parmi les suivantes

- Enoncer la formule des probabilités composées avec toutes ses hypothèses et proposer un exemple d'application.
- Enoncer la formule des probabilités totales avec toutes ses hypothèses et proposer un exemple d'application.
- Enoncé des inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev et preuve de l'une des deux.
- Définition de X suit une loi binomiale de paramètre (n, p), espérance (preuve) et variance.
- Définition de X suit une loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$ espérance et variance (preuve).
- Enoncé et démonstration de la formule de Koenig-Huygens.

② Un exercice sur le thème Proba, VA.