

Chapitre 23: Intégration sur un segment - Démonstrations

① Preuve de la proposition 23.1 : définition de l'intégrale d'une fonction en escalier

Il faut montrer que le résultat du calcul ne dépend pas de la subdivision σ choisie. Soit σ' une autre subdivision adaptée à f , deux cas sont à considérer:

1^{er} cas: σ' est plus fine que σ alors σ' a été obtenue en rajoutant un nombre fini de points à σ . Montrons que le calcul est inchangé si on ajoute un point à σ .

Considérons la subdivision $\sigma' = (x_k)_{0 \leq k \leq n} \cup \{a\}$ où $a \in I$. $\exists k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$ tel que $a \in]x_k; x_{k+1}[$.

Réfléchir à l'aide de la figure.

$$\begin{aligned} I_{\sigma'}(f) &= (x_1 - x_0)y_0 + (x_2 - x_1)y_1 + \dots + (a - x_k)y_k + (x_{k+1} - a)y_k + \dots + (x_n - x_{n-1})y_{n-1} \\ &= \dots \text{à faire} \\ &= I_{\sigma}(f) \end{aligned}$$

Si c'est vrai en ajoutant un point à σ , c'est donc vrai en ajoutant un nombre fini de points à σ .

2^{ème} cas: σ' n'est pas plus fine que σ alors $\sigma'' = \sigma \cup \sigma'$ est plus fine que σ et σ' donc, d'après ce qui précède: $I_{\sigma}(f) = I_{\sigma''}(f)$ et $I_{\sigma'}(f) = I_{\sigma''}(f)$ donc $I_{\sigma}(f) = I_{\sigma'}(f)$.

② Preuve du théorème 23.2 : définition de l'intégrale d'une fonction continue

• $f \in \mathcal{C}(I)$ donc f est bornée sur I . Soit m un minorant et M un majorant de f sur I . Figure.

La fonction constante égale à m est en escalier sur I et minore f donc $A^-(f)$ est non vide car il contient $\int_a^b m dt = m(b-a)$.

Soit $\varphi \in \mathcal{E}(I)$, $\varphi \leq f$, comme $f \leq M$, alors $\varphi \leq M$ et par croissance de l'intégrale de deux fonctions en escalier: $\int_a^b \varphi \leq \int_a^b M dt = M(b-a)$ donc $A^-(f)$ est majoré par $M(b-a)$.

$A^-(f)$ est une partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée donc elle admet une borne sup notée $\sup(A^-(f)) = \alpha$

De même $A^+(f)$ admet une borne inf notée $\inf(A^+(f)) = \beta$

• Comme on a $\varphi \leq f \leq \psi$ sur I alors $\int_a^b \varphi \leq \int_a^b \psi$ par croissance de l'intégrale d'une fonction en escalier et donc $\boxed{\alpha \leq \beta} \quad (1)$

• Soit $\varepsilon > 0$, comme $f \in \mathcal{C}(I)$, d'après le théorème d'approximation, il existe φ_0 et $\psi_0 \in \mathcal{E}(I)$ telles que $\varphi_0 \leq f \leq \psi_0$ sur I et $\psi_0 - \varphi_0 \leq \varepsilon$ sur I .

On a $\int_a^b \varphi_0 \leq \alpha$ et $\beta \leq \int_a^b \psi_0$, donc $\beta - \alpha \leq \int_a^b \psi_0 - \int_a^b \varphi_0$.

Or $\int_a^b \psi_0 - \int_a^b \varphi_0 = \int_a^b (\psi_0 - \varphi_0) \leq \varepsilon(b-a)$ et enfin $\boxed{\beta - \alpha \leq \varepsilon(b-a)} \quad (2)$

• (1) et (2) donnent $0 \leq \beta - \alpha \leq \varepsilon(b-a)$ pour tout $\varepsilon > 0$

Supposons $\beta - \alpha > 0$ et posons $\gamma = \frac{\beta - \alpha}{2}$. On a $0 < \gamma < \beta - \alpha$

En prenant $\varepsilon = \frac{\gamma}{b-a}$ dans l'inégalité (2), on obtient $\beta - \alpha \leq \gamma$ ce qui est absurde.

On conclut que $\beta - \alpha = 0$ ou encore $\alpha = \beta$ CQFD.

③ Preuve de la proposition 23.2 : Linéarité de l'intégrale d'une fonction continue

Montrons que $\int_a^b f+g = \int_a^b f + \int_a^b g$, on ferait de même pour montrer que $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \int_a^b \alpha f = \alpha \int_a^b f$

Soit $\varepsilon > 0$

$f \in \mathcal{C}(I)$ donc il existe deux fonctions en escalier φ_1 et ψ_1 telles que $\varphi_1 \leq f \leq \psi_1$ et $\psi_1 - \varphi_1 \leq \varepsilon/2$

$g \in \mathcal{C}(I)$ donc il existe deux fonctions en escalier φ_2 et ψ_2 telles que $\varphi_2 \leq g \leq \psi_2$ et $\psi_2 - \varphi_2 \leq \varepsilon/2$

On en déduit successivement les résultats suivants :

• Par définition de l'intégrale de f et de g :

$$\int \varphi_1 \leq \int f \leq \int \psi_1 \quad \text{et} \quad \int \varphi_2 \leq \int g \leq \int \psi_2 \quad \text{et en sommant} \quad \int \varphi_1 + \int \varphi_2 \leq \int f + \int g \leq \int \psi_1 + \int \psi_2.$$

Or l'intégrale d'une fonction en escalier est linéaire donc : $\boxed{\int \varphi_1 + \varphi_2 \leq \int f + g \leq \int \psi_1 + \psi_2}$

•• On a aussi $\varphi_1 + \varphi_2 \leq f + g \leq \psi_1 + \psi_2$ avec $(f+g) \in \mathcal{C}(I)$ et $(\varphi_1 + \varphi_2), (\psi_1 + \psi_2) \in \mathcal{E}(I)$

avec $(\psi_1 + \psi_2) - (\varphi_1 + \varphi_2) \leq \varepsilon$

donc $\boxed{\int \varphi_1 + \varphi_2 \leq \int f + g \leq \int \psi_1 + \psi_2}$ par définition de l'intégrale.

••• On a enfin $(\psi_1 + \psi_2) - (\varphi_1 + \varphi_2) \leq \varepsilon$ donc $\boxed{\int \psi_1 + \psi_2 - \int \varphi_1 + \varphi_2 \leq \varepsilon(b-a)}$ par croissance de l'intégrale d'une fonction en escalier.

En conclusion: l'écart entre $\int f+g$ et $\int f + \int g$ est majoré par $\int \psi_1 + \psi_2 - \int \varphi_1 + \varphi_2 \leq \varepsilon(b-a)$, et ceci vaut pour tout $\varepsilon > 0$ donc cet écart est nul par le même raisonnement que dans la preuve précédente.

$$\boxed{\int f+g - \left(\int f + \int g\right) = 0 \Leftrightarrow \int f+g = \int f + \int g}$$

④ Preuve du théorème 23.4 : Convergence des sommes de Riemann.

On se limite à le démontrer pour f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$.

f est dérivable sur $[a,b]$ et f' est continue sur $[a,b]$ donc elle est bornée et atteint ses bornes.

En appliquant l'inégalité des accroissements finis à f sur $[a,b]$, on montre que f est lipschitzienne sur $[a,b]$. Donc, $\exists \lambda \in \mathbb{R}^+$ tel que $\forall x,y \in [a,b], |f(y)-f(x)| \leq \lambda|y-x|$.

$$\begin{aligned} \text{Soit } n \in \mathbb{N}^*, \left| \int_a^b f(t) dt - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b-a}{n} f(x_k) \right| &= \left| \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t) dt - \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x_k) dt \right| \\ &= \left| \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t) - f(x_k) dt \right| \\ &\leq \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} |f(t) - f(x_k)| dt \\ &\leq \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \lambda |t - x_k| dt \\ &\leq \lambda \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} (t - x_k) dt \end{aligned}$$

En traçant la droite $y = t - x_k$ sur $[x_k, x_{k+1}]$, on constate que $\int_{x_k}^{x_{k+1}} (t - x_k) dt = \frac{(b-a)^2}{2n^2}$

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\left| \int_a^b f(t) dt - R_n \right| \leq \lambda \frac{(b-a)^2}{2n^2} \times n = \lambda \frac{(b-a)^2}{2n}$ ce qui montre que $\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n = \int_a^b f(t) dt$.

A retenir: Si f est λ - lipschitzienne sur $[a, b]$, L'erreur commise en remplaçant l'intégrale par R_n (resp R'_n) est majorée par $\frac{\lambda(b-a)^2}{2n} = O\left(\frac{1}{n}\right)$.

⑤ Preuve du théorème 23.5 : Théorème fondamental de l'analyse

Une version animée de la preuve : <https://www.youtube.com/watch?v=bTbQFLOZ4Q>