Exercices – Chapitre 21: Probabilités sur un univers fini
♦ Eléments de correction en ligne - ♥ A savoir refaire

Définition d'une probabilité sur Ω, probabilité uniforme. **♥ - ♦**

21.1 On lance deux dés et on pose $\Omega = [\![1,6]\!]^2$
a. Expliciter les événements
A= « on obtient un double »
B = « le plus petit nombre est 3 »
C = « on obtient au moins un six »
D = « la somme des deux nombres est égale à 8 »
b. On suppose que les deux dés sont parfaitement équilibrés, calculer la probabilité des événements précédents ainsi que celle de $A \cap B$, $B \cup C$, $A \setminus D$
c. On suppose désormais que les issues réalisant l'événement A ont une probabilité p deux fois plus grande que les autres issues. Refaire les calculs précédents.

21.2 Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $\Omega = [\![1, n]\!]$. On pose, $\forall k \in \Omega$, $P(\{k\}) = \dfrac{k^3}{(1+2+...+n)^2}$
a. Montrer qu'on a bien défini ainsi P une probabilité sur Ω.
b. Calculer la probabilité de $A = \{ k \in \Omega,\ k \text{ pair} \}$

21.3 Une urne contient n boules numérotées de 1 à n, avec $n \geq 3$. On les tire toutes successivement et sans remise.
a. Déterminer la probabilité qu'on ait tiré 1, 2, 3 dans cet ordre mais pas forcément à la suite.
b. Déterminer la probabilité qu'on ait tiré 1, 2, 3 dans cet ordre et à la suite.
c. Déterminer la probabilité qu'on ait tiré 1, 2, 3 à la suite mais pas nécessairement dans l'ordre

21.4 Une urne contient 25 boules indiscernables au toucher: 10 noires, 10 blanches et 5 rouges.
a. On tire trois boules successivement et avec remise de cette urne. Calculer la probabilité que le tirage soit :
(i) tricolore (ii) bicolore (iii) unicolore.
b. On recommence mais cette fois ci en tirant les boules simultanément. Refaire les calculs

Conditionnement et indépendance **♥-♦**

21.5 Une urne contient 10 boules dont 7 rouges et 3 blanches. Toutes les boules portent le numéro ① ou le numéro ②. 3 boules rouges et 1 boule blanche portent le numéro ②.
a. On tire une boule rouge. Quelle est la probabilité qu'elle porte le numéro ② ?
b. On tire une boule portant le numéro ①, quelle est la probabilité qu'elle soit blanche ?
c. On tire quatre boules successivement sans remise. Quelle est la probabilité d'obtenir dans l'ordre rouge ②, blanc ①, blanc ②, rouge ② ?

21.6 Un individu est choisi au hasard dans une population possédant la proportion de p tricheurs avec $p \in]0, 1[$. On lui fait tirer une carte d'un jeu de 52 cartes et on admet qui si c'est un tricheur il retourne 3 fois sur 4 un as. L'individu retourne un as. Quelle est la probabilité qu'il ait triché ?

21.7 Dans une urne il y (n + 1) boules dont n blanches et 1 noire. On tire successivement et sans remise n boules de l'urne. Déterminer la probabilité de l'événement A_k : « on n'a obtenu que des boules blanches sur les k premiers tirages » avec $k \in [\![1, n]\!]$.

21.8 Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On tire successivement et avec remise deux boules de cette urne. Déterminer la probabilité que le numéro obtenu au deuxième tirage soit inférieur à celui du premier.

21.9 Une urne contient une boule rouge et une boule noire. On effectue n tirages avec remise avec $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. On définit :
A_n »on obtient un tirage unicolore »

B_n : » On obtient au plus une boule rouge »
a. Calculer $P(A_n)$ et $P(B_n)$.
b. A_2 et B_2 sont-ils indépendants ?
c. A_3 et B_3 sont-ils indépendants ?
d. Etudier l'indépendance de A_n et B_n.

21.10 On lance un dé parfait à 4 faces.

L'univers est $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$ et on note P la probabilité uniforme sur Ω.
On pose : $A = \{1, 2\}$, $B = \{1, 3\}$ et $C = \{2, 3\}$.
a. Etudier l'indépendance deux à deux des événements A, B et C.
b. Les événements A,B et C sont –ils mutuellement indépendants ?

Exercices de synthèse

21.11 Un professeur imaginaire arrive devant la porte de sa salle, en retard, avec un gros trousseau contenant n clefs ($n \geq 2$).
a. Il essaye au hasard chacune des clés en écartant celles qui n'ouvrent pas la porte. Calculer la probabilité de l'événement : A_k : « la porte s'ouvre au kième essai », avec $k \in [\![1,n]\!]$.
b. La semaine suivante, même scénario mais en plus son collègue de chimie qui passe par là le distrait dans sa tâche, si bien qu'il n'écarte plus les clés en cas d'échec recalculer la probabilité de A_k.

21.12 Une rumeur circule dans le lycée : Le prochain DS de math commence à 9h (non….)
Chaque personne transforme l'information reçue en son contraire avec une probabilité $p \in]0, 1[$ et la transmet fidèlement avec une probabilité $q = 1 - p$.
On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, p_n la probabilité que la nième personne détienne la bonne information.
On a trivialement $p_1 = 1$.
a. Donner une relation de récurrence entre p_n et p_{n+1} pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
b. Expliciter p_n et déterminer lim p_n.

21.13 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère n sacs notés $S_1, \ldots, S_n$ tels que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, le sac S_k contient k jetons blancs et $(n + 1 - k)$ jetons rouges. On choisit un sac avec une probabilité égale à αk, $\alpha \in \mathbb{R}$, de choisir le sac S_k. Après quoi, on tire au hasard un jeton dans le sac choisi.
a. Trouver la valeur de α.
b. Le jeton pioché est blanc, exprimer en fonction de $k \in [\![1,n]\!]$, la probabilité que ce jeton provienne du sac S_k.

21.14 On joue avec une pièce de monnaie qui amène pile avec la probabilité $a \in]0,1[$. Pile donne un point et face deux points. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on lance la pièce jusqu'à ce qu'on obtienne un nombre de points égale ou supérieur à n. On note p_n la probabilité d'obtenir exactement n points.
a. Calculer p_1 et p_2
b. Exprimer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, p_{n+2} en fonction de p_{n+1} et p_n.
c. Expliciter p_n et étudier sa limite quand $n \to +\infty$.

21.15 Soit $n \in \mathbb{N}^*$
1. On lance successivement n pièces de monnaie parfaitement équilibrées, déterminer la probabilité p_n d'obtenir un nombre impair de piles.
2. On reprend l'expérience précédente avec des pièces telles que, $\forall k \in [\![1,n]\!]$, la kième pièce amène pile avec une probabilité est égale à $1/(2k + 1)$.
On note p_n la probabilité d'obtenir un nombre impair de pile.
a. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, exprimer p_{n+1} en fonction de p_n et n.
b. Expliciter p_n et donner la limite de p_n.