Exercices – Chapitre 23: Intégration sur un segment

♦ **Eléments de correction en ligne-** ♥ ***A savoir refaire***

♥ *Exercices du cours*

23.1 **a**. Soit p et q des entiers tels que p < q. calculer $\int_p^q \lfloor t \rfloor dt$

b. En utilisant la subdivision, $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $a_k = \dfrac{k}{n}$, calculer $\int_0^1 x dx$ en utilisant la définition.

23.2 Soit f continue sur [-1, 1] déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} \int_{-1}^{1} t^n f(t) dt$

23.3 ***Lemme de Lebesgue**:* Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle [a,b].

On pose, pour tout $n \geq 1$, $I_n = \int_a^b f(t)\sin(nt) dt$.

a. Justifier l'existence des réels $M = \sup\limits_{t \in [a,b]} |f(t)|$ et $M' = \sup\limits_{t \in [a,b]} |f'(t)|$

b. Montrer que: $\forall n \geq 1$, $|I_n| \leq \dfrac{2M + (b-a)M'}{n}$ et en déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} \int_a^b f(t)\sin(nt) dt$.

23.4 Soit f continue sur [0,1] telle que $\int_0^1 f(t) dt = 0$ et $\int_0^1 t f(t) dt = 0$.

Montrer que f s'annule au moins deux fois sur [0,1].

23.5 Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que si $\int_0^1 t \tilde{P}^2(t) dt = 0$ alors P est le polynôme nul.

23.6 ***Formules et inégalité de la moyenne***

a. Soit f une fonction continue sur [a, b] et $\mu = \dfrac{1}{b-a}\int_a^b f$ la valeur moyenne de f.

Montrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = \mu$.

b. Soit f et g continues sur [a, b], montrer que $\left|\int_a^b fg\right| \leq \sup\limits_{[a,b]} |f| \times \int_a^b |g|$

23.7 Déterminer les limites des suites suivantes:

a) $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{n}{n^2 + k^2}$ b) $S_n = \sum\limits_{k=n}^{2n-1} \dfrac{1}{k+n}$ c) $P_n = \dfrac{1}{n}\prod\limits_{k=1}^{n} (n+k)^{\frac{1}{n}}$ d) $v_n = \dfrac{1}{n^{\alpha+1}}\sum\limits_{k=1}^{n} k^{\alpha}$ ($\alpha > 0$)

23.8 On considère la fonction φ définie par $\varphi : x \mapsto \int_x^{3x} \dfrac{\cos t}{t} dt$.

a. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction φ.
b. Etudier la parité de φ et en déduire un domaine d'étude.
c. Déterminer la dérivée de φ et en déduire son tableau de variations sur $]0, 2\pi]$
d. Etudier la limite de φ en 0. Peut-on prolonger φ par continuité en 0 ? Si oui, son prolongement est-il dérivable en 0 ?
e. À l'aide d'une intégration par parties, déterminer la limite de φ en $+\infty$.

23.9 Démontrer que $\forall x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, $1 - \dfrac{x^2}{2} \leq \cos(x) \leq 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24}$

23.10 Montrer que , $\forall (n, x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}$, $\left| e^x - \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{x^k}{k!} \right| \leq \dfrac{|x|^{n+1} e^{|x|}}{(n+1)!}$ et en déduire que :

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{x^k}{k!} = e^x$

♦ *Autres exercices*

23.11 Soit f continue sur [a, b] avec a < b.

On suppose qu'il existe $n\in\mathbb{N}$ tel que : $\forall k\in\{0, \ldots, n\}$, $\int_a^b x^k f(x)dx = 0$.

Montrer que f s'annule au moins (n + 1) fois sur]a, b[

Indication : Commencer par montrer que f s'annule au moins une fois en changeant de signe, puis par l'absurde supposer que f s'annule moins de n fois en changeant de signe. On pourra introduire le polynôme $(x - a_1)(x - a_2)\ldots(x - a_p)$ où $a_1, a_2, \ldots, a_p$ sont les zéros de f et $1 \le p \le n$.

23.12 Soit f continue sur [0,1] et telle que $\int_0^1 f(t)dt = \frac{1}{2}$, montrer que f admet un point fixe.

23.13 Donner des CNS sur f continue sur [a,b] pour que $\left|\int_a^b f\right| = \int_a^b |f|$.

23.14 Soit $f\in\mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R})$, telle que f(1) = 0, démontrer que: $\left|\int_0^1 f(x)dx\right| \le \frac{1}{2}\sup_{x\in[0,1]}|f'(x)|$

23.15 Déterminer les limites des suites suivantes:

a) $I_n = \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+x}dx$ b) $I_n = \int_0^1 x^n \sin(nx)dx$ c) $I_n = \int_0^1 x^n \ln(1+x^2)dx$ d) $I_n = \frac{1}{n}\int_n^{2n} \mathrm{Arctan}\, x\, dx$

23.16 Déterminer les limites des suites suivantes.

$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{(n+k)(n+k+1)}}$ $\qquad$ $b_n = \frac{1}{n\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\lfloor\sqrt{k}\rfloor$

23.17 Trouver un équivalent quand n tend vers + ∞ de $u_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(n+2k)^3}$

23.18 Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on définit $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2}dx$

a. Déterminer I_0, I_1 et $I_n + I_{n+2}$.
b. Etudier la convergence de $(I_n)_{n\ge 0}$.
c. En déduire un équivalent de $\int_0^1 x^n \ln(1+x^2)dx$.

23.19 Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on définit $S_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}$. *Série alternée*

En utilisant la fonction $f: x \mapsto \ln(1 + x)$ et une formule de Taylor, montrer que S converge vers ln2

23.20 Soit f de classe C^4 sur $\mathbb{R}$ telle que $f'(a) = f''(a) = f^{(3)}(a) = 0$ et $f^{(4)}(a) > 0$.
Montrer que f admet un minimum local en a.

23.21 Donner l'ensemble de définition de $f(x) = \int_x^{x^2}\frac{dt}{\sqrt{1-t^3}}$.

Etudier la dérivabilité de f et donner sa dérivée. Donner le $DL_8(0)$ de f

23.22 On considère la fonction : $g : x \mapsto \int_x^{2x}\frac{dt}{te^t}$

a. Donner l'ensemble de définition de g
b. Montrer que $\forall x \neq 0$, $e^{-2x}\ln(2) \le g(x) \le e^{-x}\ln(2)$. En déduire que g est prolongeable par continuité en 0.
c. Etudier la dérivabilité de g sur son ensemble de définition et donner son tableau de variations

<u>Problème</u> : *Intégrales de Wallis et formule de Stirling*

On appelle intégrale de Wallis le réel $\boxed{I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t\,dt \text{ où } n\in\mathbb{N}}$

Partie 1 : Propriétés de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1.a. Calculer I_0 et I_1, puis justifier, à l'aide d'un changement de variable que :

$\forall n\in\mathbb{N}$, $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t\,dt$.

b. Démontrer que $\forall n\in\mathbb{N}$, $0 < I_{n+1} \leq I_n$, puis que I converge vers ℓ, $\ell \geq 0$.

2.a. En utilisant la formule d'intégration par parties, démontrer que : $\forall n\in\mathbb{N}$, $I_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2} I_n$.

2.b. En déduire que $I_{n+1} \sim I_n$.

3. Utiliser la question précédente pour démontrer l'une des deux égalités suivantes:

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N}, I_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}\frac{\pi}{2}} \qquad \boxed{\forall p \in \mathbb{N}, I_{2p+1} = \frac{2^{2p}(p)!^2}{(2p+1)!}}$$

1ère formule de Wallis

4. Montrer que $\boxed{\lim\limits_{p\to+\infty} \dfrac{2^{4p}(p!)^4}{p(2p)!^2} = \pi}$ ***2ème formule de Wallis***

Partie 2 : Recherche d'un équivalent de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$. : $\forall n\in\mathbb{N}$, on pose $S_n = (n + 1)I_nI_{n+1}$.

5.a. Calculer S_{n+1} en fonction de S_n., en déduire l'expression de S_n pour tout $n\in\mathbb{N}$.

5.b. Déterminer un équivalent de la suite $(nI_n{}^2)_{n\in\mathbb{N}}$.

5.c. En déduire que $\boxed{I_n \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}}$ puis la limite de (I_n).

Partie 3 : Formule de Stirling: On cherche à établir le résultat suivant: $\boxed{n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\dfrac{n}{e}\right)^n}$

6. Dans cette question on montre que n! à un équivalent de la forme $\lambda\sqrt{n}\left(\dfrac{n}{e}\right)^n$ avec $\lambda\in\mathbb{R}$.

On utilisera les suites définies sur $\mathbb{N}^*$: $u_n = \dfrac{n!}{\sqrt{n}}\left(\dfrac{e}{n}\right)^n$ $\qquad v_n = \ln u_n \qquad w_n = \ln(e^{-\frac{1}{n}} u_n)$

6.a. Démontrer que $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $v_{n+1} - v_n = 1-(n+\dfrac{1}{2})\ln(1+\dfrac{1}{n})$.

6.b. En utilisant un DL usuel, que $v_{n+1} - v_n \sim -\dfrac{1}{12n^2}$.

6.c. Démontrer que $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $w_{n+1} - w_n = \dfrac{1}{n(n+1)} + v_{n+1} - v_n$, puis que $w_{n+1} - w_n \sim \dfrac{11}{12n^2}$.

6.d. Justifier que v et w sont adjacentes à partir d'un certain rang et en déduire que u est convergente vers un réel $\lambda > 0$.

6.e. Justifier que : $n! \sim \lambda\sqrt{n}\left(\dfrac{n}{e}\right)^n$.

7. Utiliser la deuxième formule de Wallis et le résultat précédent pour établir la formule de Stirling : $\boxed{n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\dfrac{n}{e}\right)^n}$