Chapitre 24: Séries numériques-résumé

1. Généralités

Dans ce paragraphe, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ désigne une suite à valeurs réelles ou complexes

Définitions:

- On appelle série de terme général u_n et on note $\sum_{n\geq 0} u_n$ ou $\sum u_n$, la suite des sommes partielles définies par $\forall n\in\mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.
- On dit que la série converge lorsque la suite S converge. Dans ce cas la limite de S est appelée somme de la série et notée $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$. Sinon, on dit que la série diverge.
- En cas de convergence on définit la suite de restes partiels par $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_n$.

On a $\lim R_n = 0$ et $\forall n\in\mathbb{N}$, $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = S_n + R_n$

Remarque : *Ces définitions ainsi que les résultats ci-dessous s'étendent aux cas où* (u_n) *n'est définie qu'à partir de l'indice p et dans ce cas la série de terme général* u_n *se note* $\sum_{n\geq p} u_n$

♥ Exemples déjà vu en cours d'année:

- La série harmonique est la série de terme général $u_n = \frac{1}{n}$.

Nous avons vu que $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \to +\infty$, $S_n \sim \ln(n)$ et $S_n - \ln(n) \to \gamma$ *constante d'Euler*

La série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ est divergente.

- La série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ est convergente car (S_n) est croissante et majorée par 2. De plus $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$
- La série alternée de terme général $u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ converge et sa somme est $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln(2)$.
- Pour tout $z\in\mathbb{C}$, la série de terme général $u_n = \frac{z^n}{n!}$ converge et sa somme est $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z$.

En particulier $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!}$ converge vers e. *Démo pour $x\in\mathbb{R}$ avec l'inégalité de Taylor-Lagrange*

♥ Autre exemple: La série géométrique est la série de terme général x^n.

On a $\forall n\in\mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^{n} x^k = \begin{cases} \frac{1-x^{n+1}}{1-x} & \text{si } x \neq 1 \\ n+1 & \text{sinon} \end{cases}$.

On a trivialement (S_n) converge ssi $|x| < 1$ et dans ce cas, $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$

Proposition 24.1: ***Condition nécessaire de convergence***

$$\text{Si } \sum u_n \text{ converge alors } \lim u_n = 0$$

Attention la réciproque est fausse comme le montre le cas de la série harmonique.

Vocabulaire : Lorsque (u_n) ne converge pas vers 0, on dit que $\sum u_n$ diverge grossièrement.

c'est le cas de la série de Grandi : $\sum (-1)^n$.

Théorème 24.1 : L'ensemble des séries numériques à valeurs dans $\mathbb{K}$ convergentes est un SEV de l'espace vectoriel des suites $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$

Dans la pratique : Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent alors $\sum (\lambda u_n + \mu v_n)$ converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \mu \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$$

Proposition 24.2 ***Comparaison suite – série, série télescopique***

(u_n) converge ssi $\sum_{n\geq 0} (u_{n+1} - u_n)$ converge et dans ce cas $\sum_{n\geq 0} (u_{n+1} - u_n)$ = $\lim u_n - u_0$

2. Série à termes positifs

Dans ce paragraphe (u_n) est une suite réelle à valeurs positives et $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$

On a $\forall n \in \mathbb{N}$, $S_{n+1} - S_n = u_n \geq 0$ donc la suite des sommes partielles est croissante.

D'une manière générale, ces résultats peuvent s'appliquer à toute série dont le terme général est de signe constant APCR

Proposition 24.3 : Une série à termes positifs converge ssi la suite des sommes partielles est majorée

Si (S_n) n'est pas majorée, alors $S_n \to +\infty$ et la série diverge.

Convention : Si une série à terme positif diverge, on pose : $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = +\infty$

Proposition 24.4 : ***Comparaison série-intégrale***

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}_+$, continue, positive et décroissante.

$$\sum f(n) \text{ converge ssi } \int_0^n f(t)dt \text{ converge}$$

Application aux séries de Riemann : On considère la série de terme général $u_n = \frac{1}{n^\alpha}$ où $\alpha \in \mathbb{R}$.

Théorème 24.2: La série de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge ssi $\alpha > 1$

Remarque : Cela ne nous donne pas la valeur de la somme...

$\forall \alpha > 1$ la somme de la série est notée $\zeta(\alpha)$ et $\alpha \to \zeta(\alpha)$ est la fonction zêta de Riemann.

On connaît la valeur de $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$.

Proposition 24.5 : ***Comparaison à une série convergente (resp. divergente).***
Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs telles que $\forall n\in\mathbb{N}, 0 \le u_n \le v_n$

① Si $\sum v_n$ converge alors il en est de même pour $\sum u_n$ et $\sum_{n=0}^{\infty} u_n \le \sum_{n=0}^{\infty} v_n$

② Si $\sum u_n$ diverge alors il en est de même pour $\sum v_n$

Extension : Dans le cas où $u_n \le v_n$ APCR : On a toujours
① Si $\sum v_n$ converge alors il en est de même pour $\sum u_n$
② Si $\sum u_n$ diverge alors il en est de même pour $\sum v_n$
Mais on n'a plus l'inégalité sur les sommes des séries en cas de convergence.

Proposition 24.6 : ***Critère de l'équivalent***
Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs.

Si $u_n \sim v_n$ alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

---

3. Convergence absolue:

Dans ce paragraphe, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ désigne une suite à valeurs réelles ou complexes

Définition : On dit que la série de terme général u_n converge absolument ou encore que la suite (u_n) est sommable lorsque la série de terme général $|u_n|$ converge.

On note $\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n| < +\infty$

Exemple : $\sum \frac{(-1)^n}{n^2}$ converge absolument

Proposition 24.7: Si $\sum u_n$ est absolument convergente alors elle est convergente et on a :

$$\left|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right| \le \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$$

Attention la réciproque est fausse comme le montre le cas de la série alternée $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$.

Vocabulaire :

- Si la suite (u_n) est sommable, sa somme est $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.
- Une série qui converge sans converger absolument est dite semi – convergente.

Dans la pratique : La notion de convergence absolue permet de se ramener à l'étude d'une série à termes positifs ce qui autorise l'utilisation de tous les résultats efficaces du paragraphe 2.

Proposition 24.8 : *Sommation de la relation de domination*
Soit $\sum v_n$ une série à termes réels positifs et (u_n) une suite à valeurs dans $\mathbb{K}$ telles que $u_n = O(v_n)$.
Si $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ est absolument convergente donc convergente

Remarque : Ce résultat reste vrai si $u_n = o(v_n)$

Deux méthodes classiques pour donner la nature d'une série

① **Comparaison à une série de Riemann**

• S'il existe un réel α , $\alpha > 1$ tel que $\lim n^{\alpha}u_n = 0$ alors $u_n = o\left(\frac{1}{n^{\alpha}}\right)$ et $\sum u_n$ converge.

• S'il existe un réel α , $\alpha \leq 1$ tel que $\lim n^{\alpha}u_n = +\infty$ alors $0 \leq \frac{1}{n^{\alpha}} \leq u_n$ APCR et $\sum u_n$ diverge.

② **Utilisation de développement asymptotique** : Si il existe un réel α, $\alpha > 1$ tel que $u_n = v_n + o(\frac{1}{n^{\alpha}})$ alors les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

---

4. Complément : Critère spécial des séries alternées

Si (a_n) est décroissante et converge vers 0 alors la série alternée $\sum (-1)^n a_n$ est convergente

Exemple : $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ est convergente.

Attention : Ce résultat assure la convergence sans donner la somme de la série.

Annexes : Preuve de la proposition 24.7 pour une série à termes réel

On pose $v_n = \max(0, u_n)$ et $w_n = \max(0, -u_n)$

Si $u_n \geq 0$ alors $v_n = u_n$ et $w_n = 0$ et si $u_n \leq 0$, $v_n = 0$ et $w_n = u_n$

On a trivialement $u_n = v_n - w_n$

De plus $0 \leq v_n \leq |u_n|$ et $0 \leq w_n \leq |u_n|$ donc d'après la proposition 24.5 si la série de terme général $|u_n|$ CV alors les séries de termes généraux v_n et w_n convergent aussi.

Comme u_n est une CL de v_n et w_n, $\sum u_n$ converge.

Considérons les sommes partielles, on a $n \in \mathbb{N}$, $\left|\sum_{k=0}^{n} u_k\right| \leq \sum_{k=0}^{n} |u_k|$ via l'inégalité triangulaire.

Ces deux suites convergent donc en passant à la limite, on obtient : $\left|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$
