Chapitre 22 : Variables aléatoires

1. Variables aléatoires sur un univers fini

1.1 Définition et notations :

À l'issue d'une expérience aléatoire, d'univers Ω, on peut associer une valeur numérique au résultat. Par exemple, si un joueur lance deux dés, on peut compter le nombre de 6 obtenus ou encore calculer la somme des faces obtenues.
Mathématiquement, cette association régie par le hasard entre un événement et une valeur définit une application, que l'on désigne sous le nom de variable aléatoire.

Déf: Soit $(\Omega,\mathcal{P}(\Omega))$ un espace probabilisable fini et E un ensemble, on appelle variable aléatoire sur Ω à valeurs dans E toute application $X : \Omega \to E$

Dans la pratique : Le plus souvent E est une partie de $\mathbb{R}$ et X est une variable aléatoire réelle.
L'image de Ω par X, notée $X(\Omega)$ est l'ensemble des valeurs prises par X. Comme Ω est fini, $X(\Omega)$ est également fini et on pourra noter : $X(\Omega) = \{x_1, x_2, ..., x_p\}$.

Notations : Soit $(\Omega,\mathcal{P}(\Omega),\mathcal{P})$ un espace probabilisé fini et $X : \Omega \to E$ une variable aléatoire sur Ω.

★ Pour toute partie A de E, on note $\{X\in A)$ ou $(X\in A)$ l'événement $X^{-1}(A) = \{\omega \in\Omega \mid X(\omega)\in A\}$ et $\mathcal{P}(X\in A)$ sa probabilité.

★ Pour tout $x\in X(\Omega)$, on note $\{X = x\}$ ou $(X = x)$ l'événement $X^{-1}(\{x\}) = \{\omega \in\Omega \mid X(\omega) = x\}$ et $\mathcal{P}(X = x)$ sa proabilité.

★ Si $E = \mathbb{R}$, pour tout réel a, on note $\{X \leq a\}$ ou $(X \leq a)$ l'événement $\{\omega\in\Omega \mid X(\omega) \leq a\}$
et $\{X \geq a\}$ ou $(X \geq a)$ l'événement $\{\omega\in\Omega \mid X(\omega) \geq x\}$.
Les probabilités respectives de ces événements sont notées $\mathcal{P}(X \leq a)$ et $\mathcal{P}(X \geq a)$

Proposition 22.1: Soit X une variable aléatoire sur Ω fini.
Les événements $(X = x)$, pour $x\in X(\Omega)$, forment un système complet d'événements de Ω.
C'est-à-dire que si $X(\Omega) = \{x_1, …, x_p\}$ alors les événements $(X = x_1)$, … , $(X = x_p)$ forment un système complet d'événements de Ω.

2. Loi d'une variable aléatoire

Dans ce paragraphe, on considère $(\Omega,\mathcal{P}(\Omega),\mathcal{P})$ un espace probabilisé fini et X une variable aléatoire sur Ω.

2.1 Définition

Proposition 22.2 :

① L'application $P_X : \begin{cases} \mathcal{P}(X(\Omega)) \to [0,1] \\ A \mapsto \mathcal{P}(X \in A) \end{cases}$ est une probabilité sur $X(\Omega)$.

② $\mathcal{P}_X$ est déterminée de manière unique par la donnée de sa distribution de probabilité à savoir $\mathcal{P}(X = x)$ pour tout $x\in X(\Omega)$ et on a $\forall A\in X(\Omega)$, $\mathcal{P}(X\in A) = \sum_{x\in A} \mathcal{P}(X = x)$

Déf:
• On appelle loi de probabilité de X l'application $\mathcal{P}_X$.

• On dit que les variables X et Y suivent la même loi et on note $X \sim Y$ lorsque $\mathcal{P}_X = \mathcal{P}_Y$ c'est-à-dire $X(\Omega) = Y(\Omega)$ et $\forall x\in X(\Omega)$, $\mathcal{P}(X = x) = \mathcal{P}(Y = x)$

Remarques :

★ X est définie sur Ω, pour pouvoir donner la loi de X, il faut d'abord choisir une probabilité $\mathcal{P}$ sur Ω, ce choix détermine entièrement la loi de X.

★ La loi de X mesure la fréquence d'apparition de chaque valeur x de $X(\Omega)$.

★ Une loi de probabilité ne détermine pas une variable aléatoire : il existe des variables associées à des phénomènes distincts qui ont la même loi de probabilité.

★ Si X est à valeurs dans E alors, $\forall x \in E \setminus X(\Omega)$, $\mathcal{P}(X = x) = \mathcal{P}(\emptyset) = 0$

★ Comme ($(X = x_1), (X = x_2), \dots, (X = x_p)$) est un SCE alors $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} \mathcal{P}(X = x_i) = \sum_{x \in X(\Omega)} \mathcal{P}(X = x) = 1$.

2.2 Lois usuelles

a) Loi certaine

Déf: Soit k un réel, on dit que X suit la loi certaine égale à k lorsque X est constante égale à k

Ou encore $X(\Omega) = \{k\}$ et $\mathcal{P}(X = k) = 1$.

Dans la pratique : Cette loi ne modélise pas de situation particulière mais intervient dans la construction d'autres lois.

b) Loi uniforme

Déf: Soit X une variable aléatoire sur Ω fini, telle que $X(\Omega) = E = \{x_1, \dots, x_n\}$. On dit que X suit la loi uniforme sur $X(\Omega) = E$ ou que X est uniforme sur E lorsque les événements $(X = x_1), (X = x_2), \dots, (X = x_n)$ sont équiprobables, ou encore, $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $\mathcal{P}(X = x_k) = \dfrac{1}{n}$

On note $X \sim \mathcal{U}(E)$

Exemple : $X \sim \mathcal{U}([\![1, n]\!])$ signifie que $X(\Omega) = [\![1, n]\!]$ et que $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $\mathcal{P}(X = k) = \dfrac{1}{n}$.

Situations modélisées par une loi uniforme : On trouve cette loi dans les expériences dont les issues sont équiprobables. On lance un dé parfait à 6 faces et on note X la face obtenue. $X \sim \mathcal{U}([\![1,6]\!])$

c) Loi de Bernoulli

Déf: Soit $p \in [0, 1]$, on dit que X suit la loi de Bernoulli de paramètre p ou que X est une variable de Bernoulli de paramètre p, lorsque $X(\Omega) = \{0,1\}$, $\mathcal{P}(X = 1) = p$ et $\mathcal{P}(X = 0) = 1 - p$.

On note $X \sim \mathcal{B}(p)$

Situations modélisées par une loi de Bernoulli: On appelle expérience de Bernoulli une expérience aléatoire ayant deux issues qualifiées de succès et d'échec. Soit X valant 1 en cas de succès et 0 sinon, X est une variable de Bernoulli de paramètre p = $\mathcal{P}$(succès).

d) Loi binomiale

Déf: Soit $p \in [0, 1]$ et $n \in \mathbb{N}$, on dit que X suit la loi binomiale de paramètres (n, p) ou que X est une variable binomiale de paramètre (n, p) lorsque

$X(\Omega) = [\![0,n]\!]$ et $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $\mathcal{P}(X = k) = \dbinom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

On note $X \sim \mathcal{B}(n, p)$

Remarque : Une loi de Bernoulli de paramètre p est une loi binomiale de paramètres (1, p)

Situations modélisées par une loi binomiale : Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre d'apparition du même événement lors de la répétition de la même expérience de manière indépendante. X suit une loi binomiale de paramètre (n, p).

2.3 Image d'une variable aléatoire

Déf: Soit $X : \Omega \to E$ une variable aléatoire sur Ω et une application $f : E \to F$.
La composée $f \circ X : \Omega \to F$ est encore une variable aléatoire plus simplement notée $f(X)$.

Proposition 22.3 : Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathcal{P})$ un espace probabilisé fini, $X : \Omega \to E$ une va sur Ω et $f : E \to F$.

$$\forall y \in f(X(\Omega)),\ \mathcal{P}_{f(X)}(y) = \mathcal{P}(f(X) = y) = \sum_{\substack{x \in X(\Omega), \\ f(x) = y}} \mathcal{P}(X = x) = \sum_{x \in f^{-1}(\{y\})} \mathcal{P}(X = x)$$

Remarque : La loi de $f(X)$ est entièrement déterminée par la loi de X et par f.
Par exemple, si $Y = f(X) = X^2 - X - 2$ alors $P(Y = 0) = P(X = 2) + P(X = -1)$

2.4 Loi conditionnelle

Déf: Soit X une variable aléatoire sur Ω et $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ tel que $\mathcal{P}(A) > 0$.

On appelle loi conditionnelle de X sachant A l'application: $\mathcal{P}_{X|A} : \begin{cases} X(\Omega) \to [0,1] \\ x \mapsto \mathcal{P}_A(X = x) \end{cases}$

Exemple : On lance un dé et on note X la face obtenue puis on choisit au hasard un nombre N entre 1 et X. La loi conditionnelle de N sachant $(X = 4)$ est la loi uniforme sur $[\![1, 4]\!]$.

---

3. Famille de variables aléatoires

Dans ce paragraphe, on considère $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathcal{P})$ un espace probabilisé fini ;

3.1 Couple de variables aléatoires :

Déf: Le couple de variables aléatoires (X, Y) est la variable aléatoire définie sur Ω par :
$\forall \omega \in \Omega,\ (X, Y)(\omega) = (X(\omega), Y(\omega))$
La loi de (X, Y) est notée $P_{(X,Y)}$ et appelée loi conjointe de X et de Y.
$\forall (x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$, l'événement $((X, Y) = (x, y))$ est aussi noté $(X = x, Y = y)$ ou encore $(X = x) \cap (Y = y)$

Dans la pratique : La loi conjointe $\mathcal{P}_{(X,Y)}$, est entièrement déterminée par la donnée de la distribution de probabilités : $\mathcal{P}(X = x, Y = y)$ pour tous les éléments (x, y) de $X(\Omega) \times Y(\Omega)$.

Proposition 22.4 : Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires finies.
La famille $((X = x, Y = y))_{(x,y) \in (X,Y)(\Omega)}$ est un SCE et est appelée SCE associé à (X, Y)

Déf: Soit (X, Y) un couple de va sur Ω.
- La loi de X, notée P_X, est appelée loi marginale de (X, Y) selon X ou 1ère loi marginale.
- la loi de Y, notée P_Y, est appelée loi marginale de (X, Y) selon Y ou 2ème loi marginale

Dans la pratique : La loi conjointe permet toujours de récupérer les lois marginales en appliquant la formule des probabilités totales :

$\forall x \in X(\Omega),\ P(X = x) = \sum_{y \in Y(\Omega)} P\big((X = x) \cap (Y = y)\big)$ ici avec le SCE : $(Y = y)_{y \in Y(\Omega)}$.

Attention : On ne peut pas récupérer la loi conjointe à partie des deux seules lois marginales

Exemple : On reprend l'exemple ci-dessus. La loi conjointe de X et de N est la suivante :

Soit $(i, j) \in [\![1, 6]\!]^2$, $P(X = i, Y = j) = P_{(X = i)}(Y = j)\,P(X = i) = \begin{cases} \dfrac{1}{i} \times \dfrac{1}{6} & \text{si } j \le i \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$

$(X = i)_{1 \le i \le 6}$ est un SCE donc, d'après la FPT, $\forall j \in [\![1, 6]\!]$, $P(Y = j) = \sum_{i=1}^{6} P(X = i, Y = j) = \ldots$

Proposition 22.5 : Soit (X, Y) un couple de va à valeurs dans E et f une fonction définie sur $X(\Omega)\times Y(\Omega)$.
La loi de la composée f(X, Y) est donnée par :

$$\forall z\in f(X(\Omega)\times Y(\Omega)),\ P_{f(X,Y)}(z) = P(f(X,Y) = z) = \sum_{\substack{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)\\ f(x,y)=z}} P\big((X=x)\cap(Y=y)\big)$$

Application à la loi de la somme de deux variables aléatoires : Soit X et Y deux va sur Ω.
On pose S = X + Y. $S(\Omega) = \{x + y,\ x\in X(\Omega),\ y\in Y(\Omega)\}$

$$\forall k\in S(\Omega),\ P(S=k)=P(X+Y=k) = \sum_{\substack{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)\\ x+y=k}} P\big((X=x)\cap(Y=y)\big)$$

$$= \sum_{x\in X(\Omega)} P\big((X=x)\cap(Y=k-x)\big)$$

$$= \sum_{y\in Y(\Omega)} P\big((X=k-y)\cap(Y=y)\big)$$

3.2 n-uplets de variables aléatoires

Def: Soit $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ une famille de n variables aléatoire sur Ω.

L'application X : $\begin{cases}\Omega \to X_1(\Omega)\times X_2(\Omega)\times\dots\times X_n(\Omega)\\ \omega \mapsto \big(X_1(\omega),X_2(\omega),\dots,X_n(\omega)\big)\end{cases}$ est une variable aléatoire.

La loi conjointe de la famille $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ est la loi de X, entièrement déterminée par sa distribution de probabilité : $P(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n)$ pour tout $(x_1, x_2, \dots, x_n)\in X_1(\Omega)\times X_2(\Omega)\times\dots\times X_n(\Omega)$.

Les lois marginales de la famille $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ sont les lois de chacune des variables X_i, $i\in[\![1, n]\!]$

---

4. Variables aléatoires indépendantes:

Déf: Deux variables aléatoires X et Y sont indépendantes lorsque pour toute partie A de $X(\Omega)$ et toute partie B de $Y(\Omega)$, les événements $(X\in A)$ et $(Y\in B)$ sont indépendants.
On notera $X \perp\!\!\!\perp Y$.

Dans la pratique : On peut avoir à prouver que deux variables aléatoires sont indépendantes, ou à l'utiliser en tant qu'hypothèse. Suivant la situation, deux variables peuvent être indépendantes par définition : On lance deux dés, un bleu et un rouge, X est le résultat du dé bleu et Y celui du dé rouge. Il est clair que X et Y sont indépendantes car associées à deux expériences indépendantes.

Proposition 22.6: X et Y sont indépendantes si et seulement si
$\forall x\in X(\Omega), \forall y\in Y(\Omega), P(X = x, Y = y) = P((X = x)\cap(Y = y)) = P(X = x)P(Y = y)$.

✍ Application: Soit $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ et $Y\sim \mathcal{B}(m, p)$ deux variables aléatoires indépendantes qui suivent des lois binomiales. On pose S = X + Y, on montre que $S\sim \mathcal{B}(n + m, p)$

Proposition 22.7 : ***Conservation de l'indépendance par composition***
Soit X et Y deux variables aléatoires sur Ω, f définie sur $X(\Omega)$ et g sur $Y(\Omega)$.
Si X et Y sont indépendantes alors les variables aléatoires f(X) et g(Y) sont indépendantes.

Exemple : Si X et Y sont indépendantes alors X^2 et 2Y + 1 sont également indépendantes

Proposition 22.8 et définition : $(X_1, X_2,...,X_n)$ est une famille de variables aléatoires (mutuellement) indépendantes lorsque pour toute parties $(A_1, ... , A_n)$ de $X_1(\Omega)\times X_2(\Omega)\times...\times X_n(\Omega)$, les événements $(X_1\in A_1)$, ..., $(X_n\in A_n)$ sont mutuellement indépendants.
On encore : $(X_1, X_2,...,X_n)$ est une famille de variables aléatoires indépendantes si et seulement si $\forall(x_1, x_2,... , x_n)\in X_1(\Omega)\times X_2(\Omega)\times...\times X_n(\Omega)$, $P((X_1 = x_1), (X_2 = x_2),...,(X_n = x_n)) = P(X_1 = x_1)P(X_2 = x_2)...P(X_n = x_n)$

Exemple : Si on réalise n expériences indépendantes et qu'on associe à chacune d'elles une variable aléatoire, on obtient une famille de variables aléatoires indépendantes.

Remarque : Il est clair que toute sous-famille d'une famille de va indépendantes est encore une famille de va indépendantes.

Proposition 22.9 : Lemme des coalitions
Soit $X_1, X_2,..., X_n$ des variables aléatoires indépendantes sur Ω, $p\in[\![1, n]\!]$ et f et g deux applications.
Sous réserve d'existence, les variables aléatoires $f(X_1, X_2,...,X_p)$ et $g(X_{p+1}, X_{p+2},...,X_n)$ sont indépendantes.

Dans la pratique : Il faut retenir que si des variables aléatoires sont indépendantes alors toutes les images de deux ou plusieurs coalitions d'entre elles par des applications donnent des variables aléatoires indépendantes. Par exemple, soit $(X_1,...,X_n)$ les faces obtenues lors du lancer de n dés. Ces VA sont indépendantes par construction. Soit $p\in[\![1, n]\!]$, $S = X_1 + X_2 + ... X_p$ et $P = X_{p+1}X_{p+2}....X_n$ sont indépendantes.

Théorème 22.1 : Soit $X_1, X_2,..., X_n$ des variables aléatoires indépendantes sur Ω et $p\in[0, 1]$. Si pour tout $i\in[\![1, n]\!]$, $X_i \sim \mathcal{B}(p)$ alors on a : $X_1 + ... + X_n \sim \mathcal{B}(n, p)$.

---

5. Espérance et variance d'une variable aléatoire.

5.1 Espérance d'une variable aléatoire

Définition : Soit $(\Omega,\mathcal{P}(\Omega),\mathcal{P})$ un espace probabilisé fini et $X :\Omega\to\mathbb{R}$ une variable aléatoire réelle sur Ω.

L'espérance de X noté E(X) est le réel $E(X) = \sum\limits_{x\in X(\Omega)} x\times\mathcal{P}(X=x)$.

Dans la pratique : Si $X(\Omega) = \{x_1, x_2,..., x_p\}$ alors $E(X) = \sum\limits_{i=1}^{p} x_i \times\mathcal{P}(X=x_i)$

Remarque et vocabulaire :
★ L'espérance est la moyenne de chacune des valeurs prises par la variable aléatoire X pondérée par la probabilité que X prenne cette valeur. On dit que l'espérance est un paramètre de position.
★ On dit que la variable aléatoire X est centrée lorsqu'on a : E(X) = 0

Attention : L'espérance ne dépend pas directement de la variable aléatoire mais seulement de sa loi de probabilité.

Proposition 22.10 : Soit X une variable aléatoire réelle sur Ω, on a $E(X) = \sum\limits_{\omega\in\Omega} X(\omega)\times\mathcal{P}(\omega)$.

Proposition 22.11: ***Propriétés de l'espérance.***
Soit X et Y deux variables aléatoires réelles sur Ω.
① *Linéarité* : $\forall(a, b)\in\mathbb{R}^2$, $E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$.

② *Positivité* : Si $X \geq 0$ alors $E(X) \geq 0$.

③ *Croissance* : Si $X \leq Y$ alors $E(X) \leq E(Y)$.

④ *Inégalité triangulaire* : $|E(X)| \leq E(|X|)$.

Théorème 22.2 dit de transfert : Soit $(\Omega,\mathcal{P}(\Omega),\mathcal{P})$ un espace probabilisé fini, X une va réelle sur Ω et $f : X(\Omega)\to\mathbb{R}$ une fonction. $E(f(X)) = \sum_{x\in X(\Omega)} f(x)\times\mathcal{P}(X=x)$

Proposition 22.12 : Soient X et Y deux variables aléatoires sur Ω .
Si X et Y sont indépendantes alors on a : E(XY) = E(X) E(Y).

Remarque : *Ce résultat s'étend aux couples et aux n-uplets de variables aléatoires.*

Attention : Cette égalité est fausse pour des VA non indépendantes et sa réciproque est également fausse, mais on pourra utiliser sa contraposée : Si $E(XY)\neq E(X)E(Y)$ alors X et Y ne sont pas indépendantes.

5.2 Variance et écart-type

Définition : Soit $(\Omega,\mathcal{P}(\Omega),\mathcal{P})$ un espace probabilisé fini et X une variable aléatoire réelle sur Ω.
- On appelle variance de X le réel positif : $V(X) = E((X - E(X))^2)$.
- On appelle écart-type de X le réel positif : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

Remarque et vocabulaire :
★ La variance mesure la dispersion des valeurs de X autour de son espérance. *C'est un indicateur de dispersion*. L'écart-type mesure la même chose, son intérêt est qu'il s'exprime dans la même unité que X.
★ On dit que la variable aléatoire X est réduite lorsqu'on a : V(X) = 1

Dans la pratique : Si $X(\Omega) = \{x_1, x_2,..., x_p\}$, alors la formule de transfert donne

$$V(X) = \sum_{i=1}^{p}\left(x_i - E(X)\right)^2\times\mathcal{P}(X=x_i)$$

Théorème 22.3 ***Formule de Koenig-Huygens.***
Soit X une variable aléatoire réelle sur Ω. On a : $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$.

Dans la pratique : Si $X(\Omega) = \{x_1, x_2,..., x_p\}$, alors la formule de Koenig-Huygens donne

$$V(X) = \sum_{i=1}^{p} x_i^2\times\mathcal{P}(X=x_i) - \left(\sum_{i=1}^{p} x_i\times\mathcal{P}(X=x_i)\right)^2$$

Proposition 22.13: ***Propriétés de la variance, de l'écart-type.***
Soit X une variable aléatoire réelle sur Ω.
① $\forall(a, b)\in\mathbb{R}^2$, $V(aX + b) = a^2V(X)$
② $\forall(a, b)\in\mathbb{R}^2$, $\sigma(aX + b) = |a|\sigma(X)$

5.3 Espérance et variance des lois usuelles

a) Loi certaine : E(X) = k et V(X) = 0.

b) Loi uniforme

Proposition 22.14 : Si $X\sim\mathcal{U}(\llbracket 1,n\rrbracket)$ alors $E(X) = \frac{n+1}{2}$ et $V(X) = \frac{n^2-1}{12}$.

c) Loi de Bernoulli

Proposition 22.15 : Si $X\sim\mathcal{B}(p)$ alors E(X) = p et V(X) =p(1 - p).

d) Loi binomiale

Proposition 22.16 : Si $X\sim\mathcal{B}(n, p)$ alors E(X) = np et V(X) =np(1-p).

5.4 Covariance de deux variables aléatoires

Proposition 22.17 Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes, alors V(X +Y) = V(X) + V(Y).

Remarque : Cette proposition reste vraie pour un n-uplets de variables indépendantes.
En particulier si $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont n variables de Bernoulli indépendantes de paramètre p alors leur somme S_n est une binomiale np et sa variance est bien $V(X_1) + \ldots + V(X_n) = p(p-1) + \ldots + p(p-1) = np(p-1)$

Le calcul précédent fait apparaître une quantité qui est la différence entre $V(X + Y)$ et $V(X) + V(Y)$. On peut songer à l'utiliser pour mesurer la «corrélation» entre ces deux variables aléatoires.

Déf : On appelle covariance de X et Y le réel $Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$

Propriété immédiate : Soit X et Y deux variables aléatoires sur Ω fini.
① $V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2Cov(X,Y)$
② Si $X \perp\!\!\!\perp Y$, alors $Cov(X,Y) = 0$.

Def : On dit que les variables aléatoires X et Y sont décorrélées lorsque $cov(X, Y) = 0$

Attention : La décorrélation n'équivaut pas à l'indépendance. Si les variables sont indépendantes alors elles sont décorrélées mais la réciproque est fausse. La covariance mesure la manière dont deux variables aléatoires «varient ensemble».

---

6 Inégalités de concentration

Théorème 22.4 ***Inégalité de Markov***
Soit $(\Omega,\mathcal{P}(\Omega),\mathcal{P})$ un espace probabilisé fini et X une variable aléatoire réelle positive sur Ω.

Pour tout réel $a > 0$, on a $\mathcal{P}(X \geq a) \leq \dfrac{E(X)}{a}$

Cette inégalité appliquée à $(X - E(X))^2$ donne le résultat suivant :

Théorème 22.5 ***Inégalité de Bienaymé-Tchebychev***

Soit $(\Omega,\mathcal{P}(\Omega),\mathcal{P})$ un espace probabilisé fini et X une variable aléatoire réelle sur Ω.

Pour tout réel $\varepsilon > 0$, on a $\mathcal{P}(|X - E(X)| \geq \varepsilon) \leq \dfrac{V(X)}{\varepsilon^2} = \dfrac{\sigma(X)^2}{\varepsilon^2}$

Dans la pratique : L'inégalité de Bienaymé - Tchebychev permet de majorer la probabilité que l'écart entre X et son espérance soit supérieur à ε. Elle donne une majoration de la probabilité que X prenne une valeur en dehors de l'intervalle $]\,E(X) - \varepsilon, E(X) + \varepsilon\,[$. L'inégalité de Bienaymé - Tchebychev est un résultat général mais fournit des majorations souvent grossières.

Applications classiques :

- Loi de variance nulle : Si X est une variable aléatoire telle que $V(X) = 0$ alors d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, pour tout réel $\varepsilon > 0$, on a $\mathcal{P}(|X - E(X)| \geq \varepsilon) \leq 0$ et donc $\mathcal{P}(|X - E(X)| \geq \varepsilon) = 0$.

On en déduit que $P(X - E(X) = 0) = 1$. On dit que X est presque surement constante et suit donc une loi certaine.

- Loi faible des grands nombres :

Proposition 22.18 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $X_1, X_2, \ldots, X_n$ une famille de variables aléatoires indépendantes de même loi et d'espérance m. On note $\overline{X_n} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$, on a $\forall \varepsilon > 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} P\left(\left|\overline{X_n} - m\right| \geq \varepsilon\right) = 0$

Interprétation : la moyenne de n tirages indépendants d'une variable aléatoire donne une approximation de l'espérance de cette variable

Fiche : Chapitre 22 - Variables aléatoires - Lois usuelles à connaître

---

★ Loi certaine égale à k

$X(\Omega) = \{k\}$, $\mathcal{P}(X = k) = 1$

$E(X) = k$ et $V(X) = 0$

★ Loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$ avec $n\in\mathbb{N}^*$

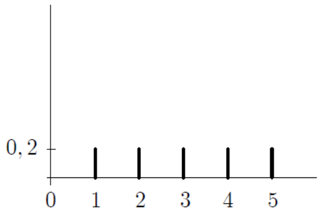
$X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1, n]\!])$

$X(\Omega) = [\![1, n]\!]$ et $\forall k\in[\![1, n]\!]$, $\mathcal{P}(X = k) = \dfrac{1}{n}$

$$E(X) = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} = \frac{n+1}{2}$$

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{n^2-1}{12}$$

Pour n = 5 :



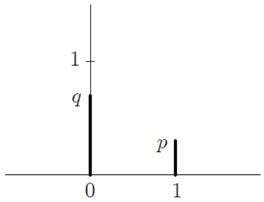
★ Loi de Bernoulli de paramètre p avec $p\in[0, 1]$

$X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$

$X(\Omega) = \{0, 1\}$, $\mathcal{P}(X = 0) = 1 - p$ et $\mathcal{P}(X = 1) = p$

$E(X) = p$ et $V(X) = p(1 - p)$

En posant q = 1-p :



★ Loi binomiale de paramètre (n, p) avec $p\in[0,1]$ et $n\in\mathbb{N}$

$X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$

$X(\Omega) = [\![0, n]\!]$, $\forall k\in[\![0, n]\!]$, $\mathcal{P}(X = k) = \dbinom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

$$E(X) = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1} p^k (1-p)^{n-k} = \dots = np$$

$$\begin{aligned} V(X) &= E(X^2) - E(X) + E(X) - (E(X))^2 \\ &= \sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} + np - n^2p^2 \\ &= \sum_{k=2}^{n} n(n-1)\binom{n-2}{k-2} p^k (1-p)^{n-k} + np - n^2p^2 = np(1-p) \end{aligned}$$

Exemples :