Exercices – Chapitre 24 : Séries numériques
Tous les exos sont corrigés

24.1 Montrer que les séries suivantes convergent et calculer leur somme :

a. $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ b. $\sum_{n\geq 1}\ln\left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right)$ c. $\sum_{n\geq 0}\frac{3^{n+2}}{5^{2n-1}}$

24.2 Donner la nature des séries suivantes en appliquant directement le cours et préciser la somme quand c'est possible.

a. $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n\sqrt{n}}$ b. $\sum_{n\geq 0}\frac{1}{2^n}$ c. $\sum_{n\geq 1}\left(1+\frac{1}{n}\right)$

d. $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n(n+1)}$ e. $\sum_{n\geq 1}\frac{3}{\sqrt{n}}$ f. $\sum_{n\geq 1}\left(\frac{3}{2^n}+\frac{1}{2n^2}\right)$

g. $\sum_{n\geq 0}\frac{(-2)^n}{n!}$ h. $\sum_{n\geq 2}\frac{1}{n(\ln(n))^2}$

24.3 Etudier la nature de la série de terme général u_n dans les cas suivants

a. $u_n = \frac{(-1)^n}{n^2+(-1)^n}$ b. $u_n = \left(\frac{1}{3}+\frac{1}{n}\right)^n$ c. $u_n = \ln\left(\frac{n^2+3n+2}{n^2+3n+1}\right)$

d. $u_n = \frac{\ln(n)}{n^2}$ e. $u_n = \frac{\ln(\ln(n))}{n^2}$ f. $u_n = \frac{n!}{n^n}$

g. $u_n = \ln(1+\frac{2}{n})-\frac{1}{n}$ h. $u_n = \left(1+\frac{1}{n^3}\right)^{n^2}-1$ i. $u_n = n-\sin\frac{1}{n}$

24.4 Soit $\sum a_n$ et $\sum b_n$ deux séries à termes strictement positifs telles que

$\sum a_n$ CV et $\sum b_n$ DV. Donner, si possible, la nature des séries suivantes :

a. $\sum(a_n+n)$ b. $\sum na_n$ c. $\sum(b_n+n)$ d. $\sum nb_n$

e. $\sum\left(a_n+\frac{1}{n}\right)$ f. $\sum\frac{a_n}{n}$ g. $\sum(a_n+b_n)$ h. $\sum\frac{b_n}{n}$

24.5 Donner la nature de la série de terme général u_n vérifiant $u_0\in\mathbb{R}$ et $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1} = \cos(u_n)$.

24.6 Donner la nature de la série de terme général $u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\cos t\,dt$

24.7 Soit x un réel.
a. Donner la nature de la série de terme général, $u_n = nx^{n-1}$ en fonction des valeurs de x.
b. En déduire $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{2^n}$

24.8 La constante d'Euler : On pose $\forall n \geq 1$, $u_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln(n)$.

a. A l'aide d'un développement limité d'ordre 2, donner un équivalent de $u_{n+1} - u_n$.

b. En déduire que (u_n) converge. Sa limite est la constante d'Euler notée γ.

c. Donner un équivalent simple de $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

24.9 ***Série alternée***

On s'intéresse à la série de Gregory : $\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

a. Justifier la convergence de la série de Gregory

b. On note S_n la somme partielle $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}$, montrer que $\forall n\in\mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^{n} \int_0^1 (-t^2)^k dt$.

c. En déduire que $\forall n\in\mathbb{N}$, $S_n = \frac{\pi}{4} + (-1)^n \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} dt$.

d. Montrer que la série $\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ converge et préciser sa somme.

24.10 ***A l'oral des concours***

On considère la suite réelle définie par $a_0 > 0$ et $\forall n\in\mathbb{N}$, $a_{n+1} = 1 - e^{-a_n}$.

1. Montrer que $a_n \to 0$

2. En utilisant u développement asymptotique, donner la nature de la série de terme général a_n^2.

3. Étudier la série de terme général $\ln\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$, en déduire la nature de $\sum_{n\geq 0} a_n$

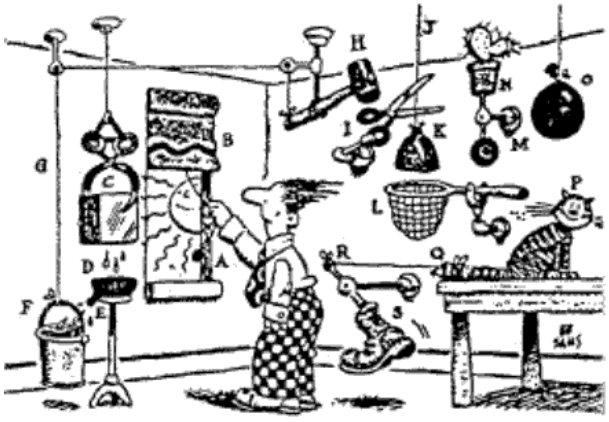
24.11 ***Un autre***

Pour tout $n \geq 1$, on pose $a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

1. Quelle est la nature de la série $\sum_{n\geq 1} a_n$?

2. Quelle est la nature de la série $\sum_{n\geq 1} \ln(1+a_n)$?

C'est bientôt fini…



MACHINE A MOTIVER

Pour se remonter le moral, Zeno va à la fenêtre **(A)**, *relève le store* **(B)**, *ce qui permet au soleil de faire fondre un bloc de glace* **(C)**. *L'eau goutte dans la poêle* **(D)** *et à travers le tuyau* **(E)** *tombe dans le seau* **(F)**. *Sous le poids du seau, la corde* **(G)** *se tend, guidant le marteau* **(H)** *sur les ciseaux* **(I)**, *ce qui coupe le fil* **(J)** *aidant le poids* **(K)** *à tomber dans les filets* **(L)**. *La poignée du filet pivote contre la boule* **(M)**, *ce qui fait tomber le cactus* **(N)**, *qui perce le ballon rempli d'eau* **(O)**. *L'eau douche le chat* **(P)** *qui bondit en avant, tirant sur le fil* **(Q)** *attaché au levier* **(R)**, *ce qui amène la chaussure* **(S)** *à se balancer et à motiver brusquement Zeno.*

TD: Un calcul de ζ(2) avec les intégrales de Wallis

Le but de cet exercice est de prouver que $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$

1. Démontrer que $\forall t\in[0,\ \frac{\pi}{2}],\ t\le\frac{\pi}{2}\sin(t)$

On pose $\forall n\in\mathbb{N},\ I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n(t)dt$ ***Intégrales de Wallis*** ♥

On rappelle que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $I_{2n+2}=\frac{2n+1}{2n+2}I_{2n}$ et $I_{2n}-I_{2n+2}=\frac{I_{2n}}{2(n+1)}$.

2. On pose $\forall n\in\mathbb{N},\ J_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}t^2\cos^n(t)dt$.

a. Démontrer que $J_{2n}\le\frac{\pi^2}{4}\frac{I_{2n}}{2(n+1)}$.

b. Via deux IPP successives, démontrer que $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ J_{2n}=-\frac{I_{2n}}{n}+(2n-1)(J_{2n-2}-J_{2n})$

c. En déduire que $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \frac{1}{2n^2}=\frac{J_{2n-2}}{I_{2n-2}}-\frac{J_{2n}}{I_{2n}}$.

3.a. Justifier que $\forall n\in\mathbb{N},\ \left|\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k^2}-\frac{J_0}{I_0}\right|\le\frac{\pi^2}{4}\frac{1}{2(n+1)}$.

b. Justifier que $\sum\frac{1}{n^2}$ converge et donner sa somme.