TD 0: Eléments de logique
Ce document est destiné être consulté tout au long de l'année. Les notions abordées constituent le fondement du cours de mathématiques.

1. Eléments de logique

1.1 Assertion et prédicat

Def : On appelle **assertion** un énoncé mathématiques qui est soit vrai, soit faux.

Un axiome est un énoncé vrai par définition. Dans le cours, les propositions, théorèmes, corollaires et lemmes sont des assertions vraies.
On considère qu'il ne peut y avoir de contradiction c'est à dire d'assertions qui sont à la fois vraies et fausses, cela est à la base du raisonnement par l'absurde.
Faire des mathématiques consiste à construire des objets puis à énoncer et démontrer des assertions vraies qui précisent les propriétés de ces objets et comment ils interagissent ensemble.

Exemples:
- 7 est un nombre premier est une assertion vraie
- 2 + 3 = 6 est une assertion fausse
- Par deux points quelconques du plan passe une droite et une seule est une assertion vraie, c'est un des axiomes d'Euclide.

Def : On appelle **prédicat** un énoncé mathématique faisant intervenir une ou plusieurs variables et dont la valeur de vérité dépend des valeurs de ces variables.

Exemple : $\mathcal{P}(x)$: $x^2 \geq 4$, est une propriété qui dépend de x, on parle alors de prédicat.
$\mathcal{P}(0)$ est une assertion fausse alors que $\mathcal{P}(3)$ est vraie.

1.2 Connecteurs logiques

Def : La **négation** d'une assertion $\mathcal{P}$ est l'assertion notée (non $\mathcal{P}$) qui est vraie lorsque $\mathcal{P}$ est fausse et fausse lorsque $\mathcal{P}$ est vraie.

Exercice 1: Donner la négation des assertions suivantes sans se préoccuper de leur valeur de vérité

a) $15 \geq 4$

b) $\pi \in \mathbb{Q}$

c) L'équation f(x) = 0 admet des solutions sur $\mathbb{R}$.

Def :
- La **disjonction** de deux assertions est notée **[**$\mathcal{P}$ **ou** $\mathcal{Q}$**].** Elle est vraie lorsque l'une des deux propositions au moins est vraie
- La **conjonction** de deux assertions est notée **[**$\mathcal{P}$ **et** $\mathcal{Q}$**].** Elle est vraie lorsque les deux propositions sont vraies

Exercice 2: Donner la valeur de vérité des assertions suivantes

a) $(1 + 1 = 2)$ ou $(2 < 6)$

b) (2 est impair) ou $(2 < 6)$

c) $2 \leq 6$

d) $(1 + 1 = 2)$ et (2 est impair)

e) $(1 + 1 = 2)$ et $(2 \leq 6)$

Remarques

★ Le OU logique est **inclusif** alors que dans le langage courant le ou est le plus souvent exclusif et a le sens de "ou bien".

★ L'accolade est une conjonction, ainsi: $\begin{cases} 1+1=2 \\ 2<6 \end{cases}$ est vraie alors que $\begin{cases} 2 \text{ est impair} \\ 2<6 \end{cases}$ est faux

★ Si P est une assertion alors [$\mathcal{P}$ et (non$\mathcal{P}$)] est fausse tandis que [$\mathcal{P}$ ou (non$\mathcal{P}$)] est vraie.

Proposition admise: Soit $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$ et $\mathcal{R}$ trois assertions.
- La négation de (non$\mathcal{P}$) est $\mathcal{P}$
- La négation de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ est (non$\mathcal{P}$) ou (non$\mathcal{Q}$)
- La négation de $\mathcal{P}$ ou $\mathcal{Q}$ est (non$\mathcal{P}$) et (non$\mathcal{Q}$)
- L'assertion [$\mathcal{P}$ ou [$\mathcal{Q}$ et $\mathcal{R}$]] a même valeur de vérité que [[$\mathcal{P}$ ou $\mathcal{Q}$] et [$\mathcal{P}$ ou $\mathcal{R}$]]
- L'assertion [$\mathcal{P}$ et [$\mathcal{Q}$ ou $\mathcal{R}$]] a même valeur de vérité que [[$\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$] ou [$\mathcal{P}$ et $\mathcal{R}$]]

Exercice 3: Donner la négation des assertions suivantes

a) $\pi > 3$ et $\pi \in \mathbb{D}$

b) $x \in [-1, 1[$.

c) $p \in \mathbb{Z}$ ou $|p| > 1$

1.3 Implication et équivalence

Les assertions qui s'énoncent sous la forme si $\mathcal{P}$ alors $\mathcal{Q}$ sont des implications.

Def : Soit $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ deux assertions, l'implication notée $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ est, par définition, l'assertion **(non$\mathcal{P}$).ou $\mathcal{Q}$**

Exercice 4: Donner la définition des implications suivantes. Sont elles vraies ?

a) $x = 1 \Rightarrow x^2 = 1$

b) $x = e \Rightarrow \ln x = 1$

c) $x = e \Rightarrow x < 3$

d) $e = 3 \Rightarrow 1 + 1 = 2$

Compléter la table de vérité suivante.

P	Q	Non P	$P \Rightarrow Q$
V	V		
V	F		
F	V		
F	F		

Remarques:
★ $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ est vraie lorsque $\mathcal{P}$ est fausse ou $\mathcal{Q}$ est vraie, par suite, toutes les implications commençant par une propriété fausse sont vraies:
★ $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ est fausse lorsque $\mathcal{P}$ est vraie et $\mathcal{Q}$ est fausse.

Vocabulaire : Lorsque $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ est vraie, on dit que:
★$\mathcal{P}$ est une **condition suffisante** pour $\mathcal{Q}$ car il suffit que $\mathcal{P}$ soit vraie pour que $\mathcal{Q}$ le soit aussi.
★$\mathcal{Q}$ est une **condition nécessaire** pour $\mathcal{P}$ car on ne peut avoir $\mathcal{P}$ vraie et $\mathcal{Q}$ fausse.

Proposition : La négation de $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ est $\mathcal{P}$ **et non** $\mathcal{Q}$.

Exercice 5: Ecrire la négation des propositions de l'exercice 4.

a) $x = 1 \Rightarrow x^2 = 1$

b) $x = e \Rightarrow \ln x = 1$

c) $x = e \Rightarrow x < 3$

d) $e = 3 \Rightarrow 1 + 1 = 2$

Dans la pratique : Les propositions et théorèmes du cours sont le plus souvent des implications.
On utilise $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ de la manière suivante.
- Si $\mathcal{P}$ est vraie alors on peut en déduire que $\mathcal{Q}$ est vraie.
- Si $\mathcal{Q}$ est fausse alors on peut en déduire que $\mathcal{P}$ est fausse.

⚠Attention: Si $\mathcal{P}$ est fausse ou si $\mathcal{Q}$ est vraie, **on ne peut rien en déduire**.

Exercice 6: On admet que : « si il pleut, alors je prends mon parapluie ». Que peut-on déduire :

a) Si j'ai mon parapluie ?

b) Si il fait grand soleil ?

c) Si il pleut ?

d) Si je n'ai pas de parapluie ?

Proposition et def: Les implications $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ et non$\mathcal{Q} \Rightarrow$ non$\mathcal{P}$ ont même valeur de vérité.
non$\mathcal{Q} \Rightarrow$ non$\mathcal{P}$ est la **contraposée** de $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$

Exercice 7: Ecrire les contraposées des implications de l'exercice 4.

a) $x = 1 \Rightarrow x^2 = 1$

b) $x = e \Rightarrow \ln x = 1$

c) $x = e \Rightarrow x < 3$

d) $e = 3 \Rightarrow 1 + 1 = 2$

Dans la pratique : Pour établir que $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ est vraie on pourra:
- Supposer que $\mathcal{P}$ est vraie et démontrer que $\mathcal{Q}$ est vraie.
- Montrer la contraposée, c'est à dire supposer que $\mathcal{Q}$ est fausse et démontrer que $\mathcal{P}$ est fausse.
- Raisonner par l'absurde en supposant que la négation de l'implication est vraie pour aboutir à une contradiction.

Def : Soit l'implication $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$, **l'implication réciproque** est $\mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{P}$

Attention: une implication peut être vraie et sa réciproque fausse.

Exercice 8: Dire si les réciproques des implications de l'exercice 5 sont vraies ou fausses

a)

b)

c)

d)

Def : On dit que deux propositions $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont équivalentes lorsqu'on a la double implication $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ et $\mathcal{Q} \Rightarrow$ P On note alors $\mathcal{P} \Leftrightarrow \mathcal{Q}$

On formule: $\mathcal{P}$ **équivaut à** $\mathcal{Q}$ ou $\mathcal{P}$ **si et seulement si** (ssi) $\mathcal{Q}$

Dans ce cas les deux assertions ont simultanément même valeur de vérité

Exemples:

a) (non(non$\mathcal{P}$)) $\Leftrightarrow \mathcal{P}$

b) ($\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$) $\Leftrightarrow$ (non$\mathcal{Q}$) $\Rightarrow$ (non$\mathcal{P}$)

c) (non($\mathcal{P}$ ou $\mathcal{Q}$)) $\Leftrightarrow$ (non$\mathcal{P}$) et (non$\mathcal{Q}$)

d) $x = e \Leftrightarrow \ln x = 1$

e) $x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 1$ ou $x = -1$

Lorsque $\mathcal{P} \Leftrightarrow \mathcal{Q}$ on dit que $\mathcal{P}$ est une **condition nécessaire et suffisante** pour $\mathcal{Q}$.

Pour établir la validité d'une équivalence, on pourra raisonner:

★ par équivalence directe.

★ par double implication.

---

2. Quantificateurs

On considère un prédicat portant sur une variable x pouvant prendre ses valeurs dans un ensemble E. Par exemple : $\mathcal{P}(x)$: $x^2 \geq 4$ avec $x \in \mathbb{R}$.

$\forall$**x**$\in$**E, $\mathcal{P}$(x)** est une assertion qui se lit signifie "pour tout x dans E, $\mathcal{P}(x)$.

$\forall$ est le **quantificateur universel**

$\exists$**x**$\in$**E, $\mathcal{P}$(x)** est une assertion qui se lit "il existe (au moins) un élément de E tel que $\mathcal{P}(x)$.

$\exists$ est le **quantificateur existentiel**

Exemples:

Pour tout $x \in [0,1]$, $x^2 \leq 1$ se note $\forall x \in [0,1], x^2 \leq 1$

Il existe un entier naturel n tel que u_n est positif se note $\exists n \in \mathbb{N}, u_n \geq 0$

Remarque : la notation $\exists ! x \in \mathbb{R}, f(x) = 0$ signifie il existe un unique réel x annulant f(x).

Exercice 11: Dire si les propositions suivantes écrites symboliquement, sont vraies ou fausses:

a) $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$

b) $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 - 1 = 0$

c) $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - 1 = 0$

d) $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 + 1 = 0$

Dans la pratique :

★ Pour montrer que $\forall x \in E$, $\mathcal{P}(x)$ est vraie, on commence la preuve par : Soit $x \in E$…
puis on montre que, indépendamment de la valeur de x dans E, $\mathcal{P}(x)$ est vraie.

★ Pour montrer que $\exists x \in E$, $\mathcal{P}(x)$ est vraie, on exhibe un élément x_0 de E tel que $\mathcal{P}(x_0)$ est vraie ou on utilise un théorème d'existence qui nous évite de chercher x_0.

★ Lorsqu'on a une hypothèse du type $\forall x \in E$, $\mathcal{P}(x)$, on peut remplacer x par une valeur choisie arbitrairement dans E. par exemple si $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq 0$ alors $f(2) \geq 0$.

★ Lorsqu'on a une hypothèse du type $\exists x \in E$, $\mathcal{P}(x)$, on peut écrire : soit $x \in E$ tel que $\mathcal{P}(x)$.....sans se préoccuper de la valeur de x.

Exercice 12: Ecrire en français la négation des affirmations suivantes

A: Il existe de gentils professeurs de mathématiques

B: Tous les élèves de PCSI2 apprennent leurs formules de trigo.

Proposition :
La négation de la proposition $\forall x \in E$, $\mathcal{P}(x)$ est $\exists x \in E$, (non $\mathcal{P}(x)$)
La négation de la proposition $\exists x \in E$, $\mathcal{P}(x)$ est $\forall x \in E$, (non $\mathcal{P}(x)$)

Exercice 13: Ecrire symboliquement les assertions suivantes ainsi que leur négation

a) Un carré est toujours positif

b) (U_n) est croissante

c) $f(x) = 2$ admet une solution sur $\mathbb{R}$

d) 0 est le plus petit élément de $\mathbb{N}$.

Attention : Lorsqu'un prédicat contient plusieurs variables, l'ordre dans lequel on écrit les quantificateurs n'est pas anodin

$\forall x \in E, \exists y \in F, \mathcal{P}(x, y)$ signifie que pour tout x fixé dans E, il existe un élément y de F tel que $\mathcal{P}(x,y)$ est vraie et y donc dépend de x.

$\exists y \in F, \forall x \in E, \mathcal{P}(x,y)$ signifie qu'il existe un élément y de F tel que $\mathcal{P}(x,y)$ est vraie pour toutes les valeurs de x.

Exercice 14: Soit la relation: $x + y = x^3 + y^3$ où x et y désignent des réels.
a) Cette relation est-elle toujours vraie?
b) Existe-t-il des valeurs de x et de y pour lesquelles la relation est vraie.
c) Dire si les propositions suivantes sont vraies ou fausses
$\mathcal{P}$: $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x + y = x^3 + y^3$
$\mathcal{Q}$: $\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in R, x + y = x^3 + y^3$

IMPORTANT: Il n'est pas pertinent de faire un usage immodéré des écritures symboliques. Une copie gagne en lisibilité à contenir des phrases écrites en français et surtout on ne mélangera pas les deux types d'écriture.**Exercices complémentaires :**

① Dire si les propositions suivantes sont vraies ou fausses puis écrire symboliquement leur négation :

a) $\forall x\in\mathbb{R}, -x \leq 0$ b) $\forall x\in\mathbb{R}, -x^2 \leq 0$ c) $\exists x\in\mathbb{R}, x > x^2$

d) $\exists x\in\mathbb{R}, \sin x = 2$ e) $\forall x\in\mathbb{R}^+, \exists y\in\mathbb{R}, x = y^2$ f) $\exists y\in\mathbb{R}, \forall x\in\mathbb{R}^+, x = y^2$

② Soit A une partie de $\mathbb{R}$, écrire symboliquement les propositions suivantes ainsi que leur négation :

a) A est majorée

b) 2 est la borne supérieure de A

c) A admet un lus petit élément

③ Montrer que $\forall x\in\mathbb{R}_+, [\ x + 1 = \sqrt{x} \Rightarrow x^2 + x + 1 = 0\ ]$

Que pensez-vous de l'assertion : $\exists x\in\mathbb{R}_+, x + 1 = \sqrt{x}$

④ Montrer que $\{\ y\in\mathbb{R} | \exists x\in[-1, 2], y = x^2\ \} = [0,4]$

⑤ Résoudre dans $\mathbb{R}$: $\sqrt{x+1} \leq 2(x-2)$

⑥ Vrai ou faux ?

a) $\exists x\in[-1, 2], x^2 + 3x + 1 = 0$ b) $\forall m\in\mathbb{R}, \exists x\in\mathbb{R}, x^2 + mx + 2= 0$

c) $\exists x\in\mathbb{R}^*, \forall y\in\mathbb{R}^*, \forall z\in\mathbb{R}^*, z = xy$ d) $\forall y\in\mathbb{R}^*, \forall z\in\mathbb{R}^*, \exists x\in\mathbb{R}^*, z = xy$

⑦ Montrer que $(\forall x\in\mathbb{R}, ax + be^x = 0) \Leftrightarrow (a = b = 0)$

⑧ Montrer que $\forall (a, b)\in\mathbb{R}^2, [\ (a + b \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}\ ) \Rightarrow (a\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \text{ ou } b\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})\ ]$