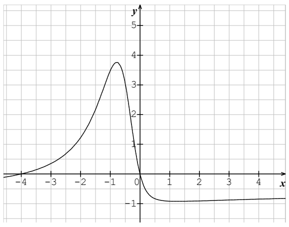
Exercices-Chapitre 2: Généralités sur les fonctions

♦ Exercice corrigé - ♥ A savoir refaire

Fonctions associées

♦ **2.1** a) Soit une fonction f définie sur ℝ dont on donne la courbe représentative ci-contre.
Parmi les six courbes représentatives ci-dessous, identifier celle de :



$f_1 : x \mapsto f(-x)$ $\quad$ $f_2 : x \mapsto f(\frac{x}{3})$ $\quad$ $f_3 : x \mapsto -f(x)$

$f_4 : x \mapsto f(x-1)$ $\quad$ $f_5 : x \mapsto f(2-x)$ $\quad$ $f_6 : x \mapsto \frac{1}{2}f(x)$

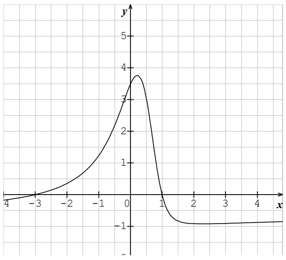


Figure 1

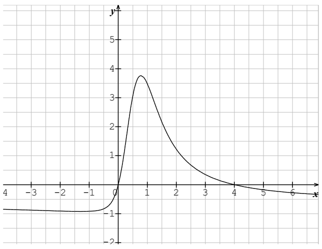


Figure 2

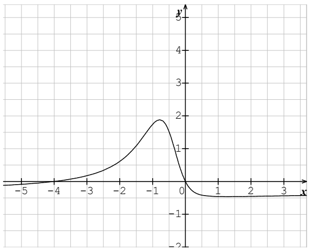


Figure 3

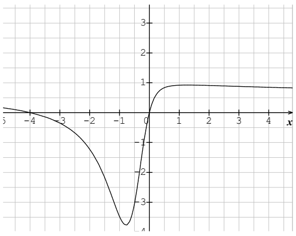


Figure 4

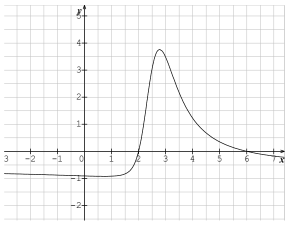


Figure 5

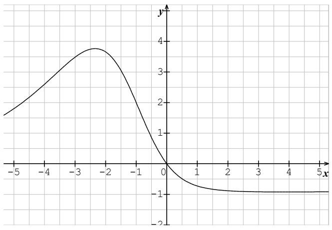


Figure 6

b) Représenter graphiquement sur [-2, 2] les fonctions suivantes :

$f_1 : x \mapsto \lfloor 2x \rfloor$ $\quad$ $f_2 : x \mapsto \lfloor x^2 \rfloor$ $\quad$ $f_3 : x \mapsto \left\lfloor \frac{x}{2}+1 \right\rfloor$

Propriétés globales

♥ **2.2** Montrer que les fonctions suivantes sont bornées sur ℝ, sans utiliser leurs variations :

$f : x \mapsto \dfrac{x-\lfloor x \rfloor}{1+x^2}$ $\quad$ $g : x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{3+\cos(x)}$ $\quad$ $h : x \mapsto 2e^{-x^2}+1$

2.3 Compléter le tableau de variations suivants sachant que f est dérivable et impaire sur $\mathbb{R}^*$.

t	$-\infty$	0		1		$+\infty$
Signe de $f'(t)$		‖	$-$	0	$+$	
Variations de f		‖ $+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

2.4 Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$, 2 - périodique et telle que $\forall x \in]0;1]$, $f(x) = 1 - x$.
a. Tracer la courbe représentative de f dans un repère orthonormal sachant que f est continue et paire.
b. Même question avec comme seule hypothèse : f est impaire.

♥ **2.5** Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$

<u>Indication</u> : Etudier la périodicité de $f : x \mapsto \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor - \lfloor x \rfloor$

♥ **2.6** On considère la fonction f définie par $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$
a. Justifier que f est définie sur $\mathbb{R}$ et étudier sa parité.
b. Donner les variations de f sur $\mathbb{R}$ sans calcul de dérivée.
c. Justifier la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}$, calculer $f'(x)$ et retrouver le résultat précédent.

2.7 Trouver toutes les fonctions périodiques et monotones sur $\mathbb{R}$.

2.8 Déterminer, s'ils existent, $\sup_I f$, $\inf_I f$, $\max_I f$, $\min_I f$ dans les cas suivants:

a. $f(x) = x^2$ sur $I =]-2, 1]$ b. $f(x) = \lfloor x \rfloor$ sur $I = [-1, 2[$ c. $f(x) = xe^{-x^2} - 1$ sur $I = \mathbb{R}_+$

2.9 Soit $n \in \mathbb{N}$, étudier l'existence et donner la valeur de $\sup_{x\in[0,1]} x^n(1-x)$

♦ **2.10 Parité et opérations**
a. Que peut-on dire de la somme de deux fonctions, définies sur $\mathbb{R}$, paires ou impaires ?
b. Que peut-on dire du produit de deux fonctions, définies sur $\mathbb{R}$, paires ou impaires ?
c. Que peut-on dire de la composée de deux fonctions, définies sur $\mathbb{R}$, paires ou impaires ?

2.11 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, une fonction strictement croissante. Montrer l'équivalence entre les propositions $\mathcal{P}$: $\forall x \in \mathbb{R}$, $f\circ f(x) = x$ et $\mathcal{Q}$: $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x$

♦ **2.12** Soit $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que $f\circ f$ est croissante et $f\circ f\circ f$ est strictement décroissante.
a. Justifier que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x) \leq f(y) \Rightarrow y \leq x$.
b. En déduire le sens de variation de f.

Continuité et dérivabilité

♥ **2.13** Soit $f : x \mapsto \lfloor x \rfloor + \sqrt{x - \lfloor x \rfloor}$
a. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x + 1) = f(x) + 1$ et en déduire la représentation graphique de f.
b. Soit $n \in \mathbb{Z}$, montrer que f est continue en n. f est-elle continue sur $\mathbb{R}$?
c. Etudier la dérivabilité de f en n.

♥ **2.14** Soit f définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = e^{-\frac{1}{x}}$ si $x > 0$ et $f(0) = 0$

a. Démontrer que f est continue sur son ensemble de définition
b. Etudier la dérivabilité de f et calculer f'(x)
c. f est-elle de classe C^1 ?
c. Mêmes questions pour g définie sur IR par g(x) = $x^2\sin\frac{1}{x}$ si $x \neq 0$ et g(0) = 0

♥ **2.15** Montrer que *f* est dérivable sur D puis calculer la dérivée

a. $f(x) = 2\cos(3x+\frac{\pi}{4})$ et D = IR
b. $f(x) = \sin\left(\frac{x+1}{x-2}\right)$ et D = IR\{2}
c. $f(x) = \sqrt{x^2+3x+4}$ et D = IR
d. $f(x) = \ln\left(x^2-2x-3\right)$ et D = $]-\infty\,;-1[\cup]3\,;\infty[$
e. $f(x) = e^{-\frac{1}{x}}$ et D = $\mathbb{R}^*$
f. $f(x) = \ln|2x-1|$ et D = IR\{1/2}

2.16 Déterminer le domaine de dérivabilité et la dérivée des fonctions suivantes :

$f : x \mapsto \sqrt{\frac{2-x}{1+x^2}}$ $\quad g : x \mapsto \ln(x-\sqrt{x^2+1})$ $\quad h : x \mapsto \ln(\ln x)$

$u : t \mapsto \sin^2(2t+1)$ $\quad v : t \mapsto \frac{\sin 2t}{\cos 3t}$ $\quad w : t \mapsto \sqrt{|\ln t|}$

$\varphi : x \mapsto \ln|x^2-6x+5|$ $\quad \phi : x \mapsto e^{\sin\left(\frac{1}{1+x^2}\right)}$ $\quad \psi : x \mapsto x^2\ln(x^3+x)$

♥ **2.17** Soit f une fonction définie et dérivable sur IR.
a. Que dire de f ' si f est paire ?
b. Que dire de f ' si f est impaire ?

♥ **2.18** Soit f une fonction dérivable sur I =] -1, 1[.
Donner le domaine de dérivabilité puis la dérivée des fonctions suivantes :

$g : t \mapsto f(2t+1)$ $\quad h : t \mapsto f(t^2)$ $\quad \varphi : t \mapsto f(\frac{1}{t})$

♥ **2.19** Soit f définie par $f(x) = \sqrt{x^3(2-x)}$. Déterminer le domaine de définition D de f et les tangentes à la courbe représentative de f aux bornes de D.

♥ **2.20** Soit f définie I =]-1, +∞[par f(x) = ln(x + 1).
Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f est n fois dérivable sur I et expliciter $f^{(n)}(x)$.

2.21 Etudier la limite en des fonctions suivantes aux bornes du domaine de définition puis préciser la nature des branches infinies de leurs courbes représentatives, si elles existent.

a) $f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \sqrt{x^2+x+1} \end{cases}$ b) $g : \begin{cases}]0;+\infty[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto x+\ln(x) \end{cases}$ c) $h : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x+\sin(x) \end{cases}$ d) $p : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{x^2+2x}{|x-1|+x} \end{cases}$

Bijections

♥ **2.22** Soit f définie sur IR par $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{e^x-1}{e^x+1}$

a. Justifier que f réalise une bijection de IR sur un intervalle J à préciser.
b. Expliciter la bijection réciproque.

♦ **2.23** Soit f définie sur $\mathbb{R}\backslash\{2\}$ par $\forall x\neq 2$, $f(x) = \dfrac{3x+1}{x-2}$

a. Justifier que f réalise une bijection de $\mathbb{R}\backslash\{2\}$ sur un intervalle J à préciser.

b. Expliciter la bijection réciproque.

2.24 f est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $\forall x > 0$, $f(x) = x^2 + \ln x$.

a. Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur un ensemble J à déterminer.

b. Montrer que f^{-1} est dérivable sur J et exprimer sa dérivée en fonction de f^{-1}.

On ne demande pas ici d'expliciter f^{-1}.

c. Donner le tableau de variations de f^{-1}.

d. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentative de f^{-1} au point d'abscisse 1.

e. Donner l'allure des courbes représentatives des deux fonctions dans un RON.

Etude de fonctions

♦ **2.25** Etudier les fonctions $f(x) = x\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$ et $g(x) = x + \ln\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|$

Chercher

2.26 Soit f une fonction croissante de [0, 1] dans [0, 1].

On considère l'ensemble $\mathcal{E} = \{ x \in [0,1] , x \leq f(x) \}$.

a. Justifier que $\mathcal{E}$ est non vide puis que $\mathcal{E}$ admet une borne supérieure $x_0 \in [0, 1]$.

b. Démontrer que $f(x_0) = x_0$.

<u>Ind</u>. on raisonnera deux fois par l'absurde en supposant $f(x_0) < x_0$ puis $f(x_0) > x_0$.

2.27 a. Soit t fixé dans $\mathbb{R}$, justifier l'existence de $\inf\limits_{x\in\mathbb{R}} \left|x^2+tx+1\right|$ puis la calculer en fonction des valeurs de t. *On pourra s'appuyer sur une représentation graphique de $f_t : x \mapsto x^2+tx+1$*

b. Justifier l'existence et donner la valeur de $\sup\limits_{t\in\mathbb{R}}\left(\inf\limits_{x\in\mathbb{R}}\left|x^2+tx+1\right|\right)$.

c. Etudier l'existence de $\inf\limits_{x\in\mathbb{R}}\left(\sup\limits_{t\in\mathbb{R}}\left|x^2+tx+1\right|\right)$.

Formule à connaître **:**