Chapitre 2: Fonctions de la variable réelle

La plupart des résultats de ce chapitre, pour certains vus en Terminale, sont admis provisoirement et démontrés ultérieurement.

1. Généralités sur les fonctions, rappels et compléments:

1.1 Définition, image, antécédent :

Def : Soit D une partie de $\mathbb{R}$, une fonction f de D dans $\mathbb{R}$ associe à chaque réel x de D un unique réel noté f(x) et appelé image de x par f.

On notera: $\boxed{f:\begin{cases} D \to \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x)\end{cases}}$

Attention : **Pour parler de la fonction on utilise f et pas f(x) qui désigne un réel.**

Vocabulaire : D est l'ensemble de définition de f . Il peut être donné avec la définition de f , ou bien on doit le déterminer en cherchant l'ensemble des réels qui ont une image par f.

Propriété 2.1 : Deux fonctions f et g sont égales si et seulement si elles ont le même ensemble de définition D et si $\forall x \in D$, f(x) = g(x)

Notation On note $\mathcal{F}(D, \mathbb{R})$ ou $\mathbb{R}^D$ l'ensemble des fonctions de D dans $\mathbb{R}$.

Def : L'ensemble des images de tous les éléments D par f s'appelle l'image de D par f et se note f(D). $f(D) = \{ f(x), x \in D \}$.

Def : Le réel x est un antécédent de y par f lorsque $x \in D$ et f(x) = y.

Remarque : Un réel y peut ne pas avoir d'antécédent par f ou en avoir un seul ou encore plusieurs.

Def : Soit D' une partie de D.

- La **restriction** de f à D' est la fonction g définie par $g:\begin{cases} D' \to \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x)\end{cases}$, c'est à dire: g est définie sur D' et $\forall x \in D'$ g (x) = f (x). On note $g = f_{|D'}$
- On dit que f est un **prolongement** de g lorsque g est une restriction de f

1.2 Représentation graphique

Le plan est muni d'un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$

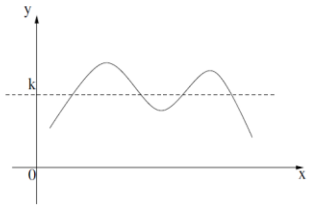
Def : La représentation graphique d'une fonction f définie sur D dans le plan repéré est l'ensemble de points défini par: $Cf = \{ M(x, f(x) / x \in D \}$.
L'équation cartésienne de C_f est y = f(x) et $x \in D$

Def : Soif f une fonction définie sur D et a un réel non nul. Les fonctions suivantes sont dites associées à f.
$f_1 : x \mapsto f(x) + a$ $\quad f_2 : x \mapsto f(x + a)$ $\quad f_3 : x \mapsto af(x)$ $\quad f_4 : x \mapsto f(ax)$

Propriété 2.2. On note C_f la représentation graphique de f dans le repère
① La représentation graphique de f_1 est l'image de C_f par la translation de vecteur $a\vec{j}$
② La représentation graphique de f_2 est l'image de C_f par la translation de vecteur $-a\vec{i}$
③ La représentation graphique de f_3 s'obtient en multipliant par a les ordonnées des points de C_f.
④ La représentation graphique de f_4 s'obtient en divisant par a les abscisses des points de C_f.

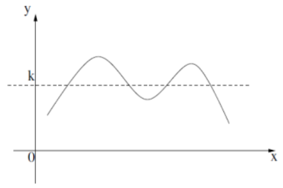
✍ Dans la pratique : Résolution graphique d'équations et d'inéquations

• $f(x) = k$



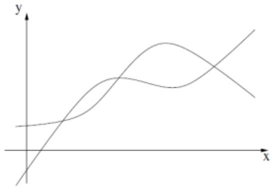
Les solutions sont les abscisses des points de C_f d'ordonnées k.

• $f(x) \leq k$



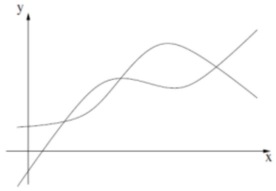
Les solutions sont les abscisses points de C_f situés en dessous de y = k.

• $f(x) = g(x)$



Les solutions sont les abscisses des points d'intersection de C_f et de C_g.

• $f(x) \leq g(x)$



Les solutions sont les abscisses des points de C_f situés en dessous de C_g.

1.3 Propriétés globales

Def : Soit f une fonction définie sur D.

• f est paire si et seulement si $\begin{cases} \forall x \in D, -x \in D \\ \forall x \in D, f(-x) = f(x) \end{cases}$

• f est impaire si et seulement si $\begin{cases} \forall x \in D, -x \in D \\ \forall x \in D, f(-x) = -f(x) \end{cases}$

Interprétation graphique : Dans un repère orthogonal, on a :
★ La courbe représentative d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'axe (Oy)
★ La courbe représentative d'une fonction impaire est symétrique par rapport à origine.

Dans la pratique: On pourra limiter l'étude de f à $D \cap \mathbb{R}^+$ et compléter par symétrie.

Def : Soit T un réel, $T \neq 0$, on dit que $f : D \to \mathbb{R}$ est T-périodique si et seulement si pour tout $x \in D$, on a $(x + T) \in D$ et $f(x + T) = f(x)$.
Symboliquement : $f : D \to \mathbb{R}$ est périodique $\Leftrightarrow \exists T \in \mathbb{R}^*, \forall x \in D, (x + T) \in D$ et $f(x + T) = f(x)$

Interprétation graphique La courbe représentative d'une fonction f T-périodique est invariante par les translations de vecteurs $kT\vec{i}$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

Dans la pratique : T désigne en général la plus petite période strictement positive et on pourra limiter l'étude de f à un intervalle de D de longueur T, le reste se déduisant par des translations de vecteurs $kT\vec{i}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Exemples à connaître :
★ cos et sin sont 2π-périodiques et plus généralement, $t \mapsto A\cos(\omega t + \varphi)$ et $t \mapsto A\sin(\omega t + \varphi)$ sont périodiques de période $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$
★ $x \mapsto x - \lfloor x \rfloor$ est périodique de période 1.

Def : Soit f une fonction définie sur D, m et M deux réels.

• <u>f est majorée</u> par M lorsque toutes les valeurs de f(x) sont inférieures à M.

$f : D \to \mathbb{R}$ est majorée $\Leftrightarrow \exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in D, f(x) \leq M$. M est un majorant de f.

• <u>f est minorée</u> par m lorsque toutes les valeurs de f(x) sont supérieures à m.

$f : D \to \mathbb{R}$ est minorée $\Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{R}, \forall x \in D, f(x) \geq m$. m est un minorant de f.

• <u>f est bornée</u> lorsqu'elle est majorée et minorée.

• f admet un <u>maximum</u> en $a \in D$ ssi $\forall x \in D, f(x) \leq f(a)$

f admet un maximum sur D $\Leftrightarrow \exists a \in D, \forall x \in D, f(x) \leq f(a)$

• f admet un <u>minimum</u> en $a \in D$ ssi $\forall x \in D, f(x) \geq f(a)$

f admet un minimum sur D $\Leftrightarrow \exists a \in D, \forall x \in D, f(x) \geq f(a)$

• Un <u>extremum</u> de f est un minimum ou un maximum de f.

Proposition 2.3 : Soit $f : D \to \mathbb{R}$.
① f est bornée si et seulement si $\exists \alpha \in \mathbb{R}_+, \forall x \in D, |f(x)| \leq \alpha$

② f est majorée (resp minorée) si et seulement si f(D) est majorée.
Dans ce cas f(D) admet une borne sup (respectivement une borne inf) qui n'est pas nécessairement atteinte par f. On la note $\sup_D f$ (resp. $\inf_D f$)

③ f admet un maximum, (resp. un minimum) si et seulement f(D) admet un plus grand élément (resp. plus petit élément). Dans ce cas on note $\max_D f$ le maximum de f (resp $\min_D f$ le minimum)

Def : Soit $f : D \to \mathbb{R}$ où D est un intervalle de $\mathbb{R}$.
• f est <u>croissante</u> sur D lorsque f conserve l'ordre.

Symboliquement : f est croissante sur D $\Leftrightarrow \forall (a, b) \in D^2, (a \leq b) \Rightarrow (f(a) \leq f(b))$

• f est <u>décroissante</u> sur D lorsque f renverse l'ordre.

Symboliquement : f est décroissante sur D $\Leftrightarrow \forall (a, b) \in D^2, (a \leq b) \Rightarrow (f(a) \geq f(b))$

• Lorsque les implications précédentes restent vraies avec des inégalités strictes on dit que f est strictement croissante ou strictement décroissante sur D.

• f est (strictement) <u>monotone</u> lorsque f est (strictement) croissante ou (strictement) décroissante sur D.

<u>1.4 Opérations sur les fonctions</u>

<u>a. Opération algébriques</u>

Def : Soit f et g deux fonctions définies sur la même partie D de $\mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$
• La fonction λf est définie sur D par $\forall x \in D, (\lambda f)(x) = \lambda f(x)$.
• la fonction $|f|$ est définie sur D par $\forall x \in D, |f|(x) = |f(x)|$
• La somme f + g est définie sur D par $\forall x \in D, (f + g)(x) = f(x) + g(x)$.
• Le produit $f \times g$ est défini sur D par $\forall x \in D, (f \times g)(x) = f(x) \times g(x)$.
• Lorsque $\forall x \in D, g(x) \neq 0$, le quotient f /g est défini sur D par $\forall x \in D, (f/g)(x) = f(x)/g(x)$

Proposition 2.4 : Soit f et g monotones sur I et $\lambda \in \mathbb{R}^*$.
① λf est monotone sur I de même monotonie que f si $\lambda > 0$, de monotonie contraire si $\lambda < 0$.
② Si f et g sont croissantes (resp. décroissantes) sur I alors (f + g) est croissante (resp. décroissante) sur I.
③ f est bornée sur D si et seulement si |f| est majorée sur D.

b. Composition

Def : Soit f et g sont deux fonctions définies respectivement sur des domaines D et D'.
Si $f(D) \subset D'$, ou encore si f est à valeurs dans D', alors on peut définir la **composée h = g o f** sur D par $\boxed{\forall x \in D,\ h(x) = g(f(x))}$.
On a donc $g \circ f : x \mapsto g(f(x))$ ou encore $\boxed{g \circ f : x \mapsto f(x) \mapsto g(f(x))}$

✍ Dans la pratique : pour déterminer l'ensemble de définition de $g \circ f$, il faut déterminer les réels x de D tels que f(x) appartiennent à D', c'est à dire $\{ x \in D,\ f(x) \in D' \}$

Propriétés 2.5 Composition de deux fonctions monotones:
Soit I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$, $g : J \to \mathbb{R}$ telles que **$f(I) \subset J$**
① Si f et g sont monotones de même sens alors $g \circ f$ est croissante sur I.
② Si f et g sont monotones de sens contraires alors $g \circ f$ est décroissante sur I.

1.5 Propriétés asymptotiques

Def : Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère.
• Si a est une borne de I et si $\lim\limits_{x \to a\pm} f(x) = \pm\infty$ alors la droite d'équation x = a est une asymptote verticale à la courbe $\mathcal{C}_f$.
• Si $+\infty$ est une borne de I et si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$ alors la droite d'équation $y = \ell$ est une asymptote horizontale à la courbe $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $+\infty$. (Idem en $-\infty$)

• Si $+\infty$ est une borne de I, la droite d'équation y = mx + p est une asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $+\infty$ lorsque $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[f(x) - (mx + p) \right] = 0$. (Idem en $-\infty$)

• Plus généralement, si $+\infty$ est une borne de I et g est une fonction définie sur I, de courbe représentative $\mathcal{C}_g$, on dit que $\mathcal{C}_g$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $+\infty$ lorsque $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[f(x) - g(x) \right] = 0$.(Idem en $-\infty$)

Vocabulaire : Si $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ sont asymptotes quand x tend vers $+\infty$, la position relative des deux courbes est donnée par le signe de f (x) - g (x) au voisinage de $+\infty$. (Idem en $-\infty$)

✍ Dans la pratique : Lorsque $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$, on dit que la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une branche infinie pour la déterminer on étudie la limite de $\dfrac{f(x)}{x}$ en $\pm\infty$ et on applique l'algorithme de recherche suivant :

★ Si $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \pm\infty$ on conclut que $\mathcal{C}_f$ possède une branche parabolique de direction (Oy).

★ Si $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$, on conclut que $\mathcal{C}_f$ possède une branche parabolique de direction (Ox).

★ Si $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = m$, $m \in \mathbb{R}^*$, on étudie la limite de $f(x) - mx$ en $\pm\infty$.

✳ Si $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-mx\right]=p$, p∈ℝ, alors on conclut que la droite d'équation y = mx + p est asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$.

✳ Si $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-mx\right]=\pm\infty$ alors on conclut que $\mathcal{C}_f$ possède une branche parabolique de direction asymptotique y = mx.

✳ Si f (x) - mx n'admet pas de limite en $\pm\infty$, on conclut qu'il n'y a ni branche parabolique, ni asymptote.

★ Si $\dfrac{f(x)}{x}$ n'admet pas de limite en $\pm\infty$, on conclut qu'il n'y a ni branche parabolique, ni asymptote.

---

2. Régularité d'une fonction

2.1 Continuité:

Déf: Soit f une fonction définie sur un intervalle I de ℝ et a un réel appartenant à I.

- On dit que f est continue en a, lorsque $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$
- On dit que f est continue sur I lorsque f est continue en tout point de I.

Interprétation graphique : On peut tracer la représentation d'une fonction continue sur I sans lever son crayon.

Exemples: $x\mapsto x^n$, $x\mapsto \dfrac{1}{x}$, $x\mapsto \sqrt{x}$, cos, sin, exp et ln sont continues sur tout intervalle où elles sont définies.
Contre-exemple: La fonction partie entière.

✍ Dans la pratique: **Comment démontrer la continuité sur un intervalle?**
★ **SI** f est dérivable sur I **ALORS** f est continue sur I (voir plus loin)
★ Dans les cas plus complexes, on revient à la définition.

✍ Exemple : $f : x\mapsto \lfloor x\rfloor+\sqrt{x-\lfloor x\rfloor}$ est continue sur ℝ

Théorème 2.1 : Théorème des valeurs intermédiaires
Soit f continue sur un intervalle I, et a et b∈I.
Pour tout réel k compris entre f(a) et f(b) , il existe au moins un réel c, compris entre a et b tel que f(c) = k.
ou encore
Pour tout réel k compris entre f(a) et f(b) , l'équation f(x) = k admet au moins une solution.
ou encore
Tout réel k compris entre f(a) et f(b), admet, au moins, un antécédent par f.

Applications :
★ Toute fonction continue sur ℝ qui change de signe s'annule au moins une fois..
★ Toute fonction continue sur ℝ, qui ne s'annule pas sur ℝ, garde un signe constant.
★ L'équation $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ avec a, b, c, d∈ℝ, a≠0, admet au moins une solution réelle.

2.2. Dérivabilité

a. Dérivabilité et interprétation géométrique

Déf: Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et a un réel appartenant à I.

On dit que f est dérivable en a, lorsque $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ existe et est finie.

Cette limite est appelée nombre dérivé de f en a et est notée $f'(a)$.

Illustration graphique :

Proposition 2.6 : Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et a un réel de I.
Si f est dérivable en a, alors $\mathcal{C}f$ admet au point d'abscisse a une tangente de coefficient directeur f'(a). L'équation réduite de la tangente au point A(a,f(a)) à la courbe $\mathcal{C}_f$ est:
$\boxed{y=f'(a)(x-a)+f(a)}$.

Remarques :

★ Lorsque f'(a) = 0, la courbe C_f admet une tangente horizontale au point d'abscisse a.

★ Si f n'est pas dérivable en a mais continue en a avec $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\pm\infty$ alors $\mathcal{C}_f$ admet une tangente verticale au point d'abscisse a.

★ Si le taux d'accroissement admet une limite ℓ à droite ou à gauche de a alors on dit que f est dérivable à droite ou à gauche de a et C_f admet une demi-tangente de pente ℓ au point d'abscisse a. Si une courbe admet deux demi-tangentes différentes au point d'abscisse a, on dit que le point A(a,f(a)) est un point anguleux.

✍ Exemples :

• La fonction racine carrée n'est pas dérivable en 0. Sa courbe admet en (0, 0) une tangente verticale.
• La fonction valeur absolue n'est pas dérivable en 0. Sa courbe admet en (0,0) deux demi-tangentes de pente 1 et -1.

b. Dérivabilité et interprétation numérique

Soit f dérivable en a, pour x proche de a, on a: $\boxed{f(x)\approx f'(a)(x-a)+f(a)}$

f'(a)(x-a) + f(a) est l'approximation affine de f en a

Applications en physique/chimie/SI: Pour x proche de 0

$\sin x\approx x$ $\quad (1+x)^n\approx 1+nx$ $\quad \sqrt{1+x}\approx 1+\frac{1}{2}x$

Proposition 2.7 : **Si** une fonction est dérivable en a, **alors** elle est continue en a.

⚠ Attention: La réciproque est fausse.
✍ Contre-exemples: La fonction racine carrée est continue en 0 mais non dérivable en 0.

c. Dérivabilité sur un intervalle et fonction dérivée

Définition : Soit f une fonction définie sur un intervalle I
• On dit que f est dérivable sur I, ssi f est dérivable en tout point de I.

• Si f est dérivable sur I alors la fonction f ' qui à tout réel a de I associe f'(a) est la fonction dérivée de f notée f '.

Corollaire: Si f est dérivable sur I **alors** f est continue sur I

Proposition 2.8 : Dérivabilité et opérations algébriques
Soit f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle I et λ un réel
① (λf) est dérivable sur I de dérivée $(\lambda f')$.
② $(f + g)$ est dérivable sur I de dérivée $(f' + g')$.
③ $(f\times g)$ est dérivable sur I de dérivée $f'\times g + f\times g'$
④ Si g ne s'annule pas sur I, $\dfrac{f}{g}$ est dérivable sur I de dérivée $\dfrac{f'g - g'f}{g^2}$

Théorème 2.2 : Dérivabilité et composition
Soit $f : I \mapsto \mathbb{R}$ dérivable sur I intervalle de $\mathbb{R}$ et $g : J \mapsto \mathbb{R}$ dérivable sur J intervalle de $\mathbb{R}$ avec $\underline{f(I) \subset J}$, la fonction $g\circ f : I \mapsto \mathbb{R}$ est dérivable sur l'intervalle I et $\boxed{(g\circ f)' = f'.(g' \circ f)}$.

Application : On retrouve les formules vues en Terminale et on montre que si u est dérivable sur I et ne s'annule pas sur I alors $\ln|u|$ est dérivable sur I avec $(\ln|u|)' = \dfrac{u'}{u}$.

✍ Exercices de révision et formulaire

✍ Dans la pratique: **Comment démontrer la dérivabilité sur un intervalle?**
★ On pourra écrire: *f* est dérivable sur I comme somme, produit, quotient, composée de….en précisant les intervalles en jeu ou dans les cas les plus simples : f est dérivable sur I d'après les théorèmes généraux

★ Dans les cas plus complexes, on revient à la définition, en particulier si l'ensemble de définition comporte des singularités.

Def : Soit f définie sur I, on dit que **f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I** si f est dérivable sur I et si f' est continue sur I.

d. Variations et signe de la dérivée:

Théorème 2.3 (admis provisoirement): Soit f une fonction dérivable sur un **intervalle** I de $\mathbb{R}$.
① f est constante sur I si et seulement si pour tout x de I, $f'(x) = 0$.
② f est croissante sur I si et seulement si pour tout x de I, $f'(x) \geq 0$.
③ f est décroissante sur I si et seulement si pour tout x de I, $f'(x) \leq 0$
④ f est strictement croissante sur I si et seulement si pour tout x de I,
$f'(x) \geq 0$ et ne s'annule éventuellement qu'en des points isolés.
⑤ f est strictement décroissante sur I si et seulement si pour tout x de I,
$f'(x) \leq 0$ et ne s'annule éventuellement qu'en des points isolés.

✍ Exemples : La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $\forall x\in\mathbb{R}$, $f(x) = x + \sin x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

e. Extremum et dérivée

Proposition 2.9 : Soit f dérivable sur un intervalle ouvert I et $a\in I$.
Si f admet un maximum ou un minimum en a alors $f'(a) = 0$.

Le cas de $f : x \mapsto x^3$ dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $f'(0) = 0$ montre que la réciproque est fausse.

Dans la pratique : Les extrema éventuels de f sont à chercher là où la dérivée de f s'annule, là où f n'est pas dérivable et aux bornes de I.

f. Dérivées successives

Si f st dérivable sur I avec f' dérivable sur I, alors f est deux fois dérivable sur I et on note f'' la dérivée de f'. Tant que les dérivées obtenues sont dérivables, on peut ainsi dériver

successivement. On obtient ainsi f'', $f^{(3)}$,....$f^{(n)}$ dérivée nième de f sur I.
Lorsqu'elle existe, $f^{(n+1)}$ est la dérivée de $f^{(n)}$.

Dans la pratique :

- Si le signe de $f'(x)$ est difficile à étudier et si f' est dérivable alors on peut calculer f''. Le signe de $f''(x)$ donne les variations de f' et éventuellement le signe de $f'(x)$.

- Si f est deux fois dérivable sur I alors f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.

3. Convexité

Def : Soit f une fonction définie sur I un intervalle de $\mathbb{R}$ et C_f sa courbe représentative.

- On dit que f est convexe sur I lorsque la courbe C_f est située en dessous de chacune de ses cordes.
- On dit que f est concave sur I lorsque la courbe C_f est située au-dessus de chacune de ses cordes.

Proposition 2.10 : Soit f une fonction définie sur un intervalle I
① Si f est dérivable sur I, on a les équivalences suivantes :
f est convexe sur I $\Leftrightarrow$ C_f est située au-dessus de chacune de ses tangentes
f est concave sur I $\Leftrightarrow$ C_f est située en-dessous de chacune de ses tangentes
② Si f est deux fois dérivables sur I, on a les équivalences suivantes :
f est convexe sur I $\Leftrightarrow \forall x\in I,\ f''(x) \geq 0$
f est concave sur I $\Leftrightarrow \forall x\in I,\ f''(x) \leq 0$

4. Fonction bijective, bijection réciproque :

Déf: On appelle identité de I et on note Id_I la fonction définie sur I par : $\forall x\in I,\ f(x) = x$

4.1 Notion de bijection:

Déf: Soit I et J deux parties de $\mathbb{R}$ et $f\ : I\to J$

- On dit que f est (ou réalise) une bijection de I sur J lorsque tout réel y de J admet un unique antécédent x dans I ou encore lorsque $\forall y\in J,\ \exists! x\in I,\ y = f(x)$.
- On définit alors la bijection réciproque de f notée $f^{-1} : J\to I$ qui à tout élément y de J associe son unique antécédent par f.

Remarques et vocabulaire:

★ On dit aussi que $f : I\to J$ est une fonction bijective.

★ f^{-1} est une bijection de J sur I et sa bijection réciproque est f.

$$I \underset{f^{-1}}{\overset{f}{\rightleftarrows}} J$$

Propriétés immédiates: Soit f une bijection de I sur J et f^{-1} sa bijection réciproque.
① $\forall x\in I,\ f^{-1}(f(x)) = x$ ou encore $f^{-1}\circ f = Id_I$
② $\forall y\in J,\ f(f^{-1}(y)) = y$ ou encore $f\circ f^{-1} = Id_J$
③ $\forall x\in I,\ \forall y\in J,\ y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$
④ Dans un repère orthonormal, les courbes représentatives de f et de f^{-1} sont images l'une de l'autre par la symétrie orthogonale par rapport à la première bissectrice y = x.

Théorème 2.4 : Théorème de la bijection.
Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Si f est continue et **strictement** monotone sur I alors f(I) est un intervalle et f réalise une bijection de I dans f(I).

Dans la pratique: l'intervalle f(I) s'obtient en calculant les limites aux bornes de I, on s'appuie le plus souvent sur le tableau de variations de f.

✍ Exemple : La fonction f définie par $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x + \sin(x)$, réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Théorème 2.5 : Continuité et monotonie de f^{-1}
Si f est continue et strictement monotone sur I alors f est bijective de I sur f(I) et f^{-1} est continue, strictement monotone de même monotonie que f sur f(I).

Théorème 2.6 : Théorème de dérivation de f^{-1} (admis provisoirement)
Soit f une bijection de I sur J, $a \in I$ et $b = f(a)$

Si f est dérivable en a avec $f'(a) \neq 0$ alors f^{-1} est dérivable en b et $\left(f^{-1}\right)'(b) = \dfrac{1}{f'(a)}$

Interprétation géométrique: Soit f bijective et dérivable en a On note *C* sa courbe représentative et Γ celle de sa bijection réciproque.
On a deux cas possibles.

- $f'(a) \neq 0$. *C* admet au point a une tangente non horizontale de pente $f'(a)$ et Γ admet au point $b = f(a)$ une tangente de pente $\dfrac{1}{f'(a)}$. Ces droites sont symétriques par rapport à $(y = x)$
- $f'(a) = 0$, *C* admet au point a une tangente horizontale de pente nulle et, par symétrie d'axe $y = x$, Γ admet au point $b = f(a)$ une tangente verticale. f^{-1} n'est donc pas dérivable en $b = f(a)$.

Corollaire : Si f est dérivable sur I avec $\forall x \in I$, $f'(x) \neq 0$, alors f^{-1} est dérivable sur J et $\left(f^{-1}\right)' = \dfrac{1}{f' \circ f^{-1}}$