Exercices-Chapitre 3: Fonctions usuelles partie 1
♦ **Exercice corrigé - ♥ A savoir refaire**

♦ ***Calculs algébriques, inégalités, égalités***

♥ **3.1** Montrer les inégalités suivantes:

a. $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $e^x \geq 1+x+\dfrac{x^2}{2}$

b. $\forall t > -1$, $\dfrac{t}{t+1} \leq \ln(1+t) \leq t$

Pour ces deux inégalités, préciser les cas d'égalité

c. $\forall x > 0$, $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x < e < \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x+1}$ *Indic : Utiliser b.*

d. $\forall x \in \mathbb{R}^*_+$, $\forall \alpha \in]0, 1[$, $(1+x)^\alpha < 1 + x^\alpha$

e. $\forall x \in]0, 1[$, $x^x (1-x)^{(1-x)} \geq \dfrac{1}{2}$

f. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{ch}(x) \geq 1+\dfrac{x^2}{2}$

♦ **3.2** Soit $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $0 < a < b$ et f définie sur $]0, +\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{\ln(1+ax)}{\ln(1+bx)}$.

Montrer que f est strictement croissante sur son ensemble de définition et en déduire que $\ln\left(1+\dfrac{a}{b}\right)\ln\left(1+\dfrac{b}{a}\right) \leq (\ln 2)^2$

3.3 Trigonométrie hyperbolique: Soit a et b deux réels
a. Justifier que ch(a+b) = ch(a)ch(b) + sh(a)sh(b) puis que sh(a+b) = ch(a)sh(b) + sh(a)ch(b).
b. Donner des formules pour ch(a-b), sh(a-b), ch(2a) et sh(a).
c. Linéariser $\mathrm{ch}^2(a)$ et $\mathrm{sh}^2(a)$.
d. Transformer ch(a) + ch(b) en produit.

Equations, inéquations

♥ **3.4** Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a. $\ln|x-1| + \ln|x+3| = \ln|3x^2 - 4x + 1|$

b. $e^x - 3e^{-x} = 4$

♥ **3.5** Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

c. $2^{x+4} + 3^x = 2^{x+2} + 3^{x+2}$

d. $x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x$

e. $3^x + 4^x = 5^x$

Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes suivants : $\begin{cases} x+y=7 \\ \log x + \log y = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} e^x e^{2y} = a \\ 2xy = 1 \end{cases}$ où $a \in \mathbb{R}$.

3.6 Résoudre dans $\mathbb{R}$:

a. $5\mathrm{ch}(x) - 4\mathrm{sh}(x) = 3$

b. $\mathrm{ch}(x) \geq 2$

c. $\begin{cases} \mathrm{ch}(x)+\mathrm{ch}(y) = 4 \\ \mathrm{sh}(x)+\mathrm{sh}(y) = 1 \end{cases}$

♦ **3.7** Déterminer les valeurs des réels a et b pour lesquelles le système (S): $\begin{cases} \mathrm{ch}(x)+\mathrm{ch}(y) = a \\ \mathrm{sh}(x)+\mathrm{sh}(y) = b \end{cases}$ admet des solutions dans $\mathbb{R}^2$.

♥ **3.8** Résoudre dans ℝ les équations et inéquations suivantes

a. $\sin\left(\frac{\pi}{6}-x\right) \le \frac{1}{2}$ b. $2\cos^2(2x) - 3\cos(2x) = -1$ c. $\tan x < \frac{1}{\sqrt{3}}$

d. $\tan\left(2x+\frac{\pi}{4}\right) = -1$ e. $\tan(x)\tan(2x) = 1$ f. $\cos x > \cos\frac{x}{2}$ sur $[0, 2\pi[$

g. $\cos(x) + \cos(2x) \ge 0$

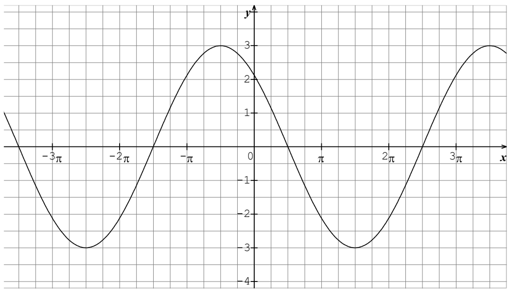
Propriétés globales

3.9 Donner l'ensemble de définition puis étudier la parité et la périodicité des fonctions suivantes et en déduire un intervalle d'étude possible.

$f(t) = \sin^2(t)\cos(2t)$ $g(t) = \dfrac{1}{\sin t + \sin(2t)}$ $h(t) = \sin(|t|)$

♥ **3.10** Etudier la périodicité des fonctions suivantes
$g_t : x \mapsto A\cos(wt - kx + \varphi)$ $g_x : t \mapsto A\cos(wt - kx + \varphi)$

♥ **3.11** Soit f : ℝ → ℝ une fonction définie par $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = A\cos(\omega x + \varphi)$ avec A, ω et $\varphi \in \mathbb{R}$. On donne, ci-dessous, la représentation graphique de f. Déterminer les réels A, ω et φ.



Etude de fonctions:

3.12 Etudier la fonction g définie sur $\mathbb{R}_+$ par $g(x) = x^2\sqrt{|\ln x|}$ si $x > 0$ et $g(0) = 0$

3.13 Etudier sur ℝ les fonctions suivantes : $f : t \mapsto 3\cos(2t + \frac{\pi}{3})$ et $g : x \mapsto \cos^2 x - \cos x + 1$

♦ **3.14** On considère la fonction : $f : x \mapsto -2\dfrac{\sin^3 x}{\cos x}$

a. Déterminer l'ensemble de définition de f. On notera D ce domaine.
Montrer que : $\forall x \in D$, $f(x) = \sin(2x) - 2\tan(x)$

b. Etudier la fonction f et tracer l'allure de sa courbe représentative.

♥ **3.15** ***Fonction*** u^v

a. Donner le domaine de dérivabilité et la dérivée des fonctions suivantes :

$f : x \mapsto (3x^2)^x$ $g : x \mapsto (\cos x)^x$ $u : x \mapsto (\ln x)^{\sqrt{x}}$ $v : x \mapsto (\tan x)^{x^2}$

b. Etudier les fonctions suivantes :

$u(x) = x^x$ $v(x) = x^{\frac{1}{x}}$ ♦ $w(x) = (1+\frac{1}{x})^x$

3.16 Soit I un intervalle et f définie sur I par $\forall x \in I$, $f(x) = \dfrac{1}{\cos x}$.

a. Déterminer I sachant que I est le plus grand intervalle de $\mathbb{R}_+$ contenant 0 sur lequel on peut définir f.

b. Démontrer que f réalise une bijection de I sur un intervalle J à déterminer.

c. Donner l'allure de la courbe représentative de f et de f^{-1}.

d. Préciser le domaine de dérivabilité et la dérivée de f^{-1}.

Raisonner

♥ **3.17** a. Etudier la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\ln x}{x}$ sur $]0, +\infty[$.

b. Trouver tous les entiers n et m strictement positifs et distincts tels que $n^m = m^n$

c. Discuter suivant les valeurs de $n \in \mathbb{N}^*$, le nombre de solutions de $e^x = x^n$

♦ **3.18** Résoudre dans $\mathbb{R}$: $x^6 + x^4 = 810$

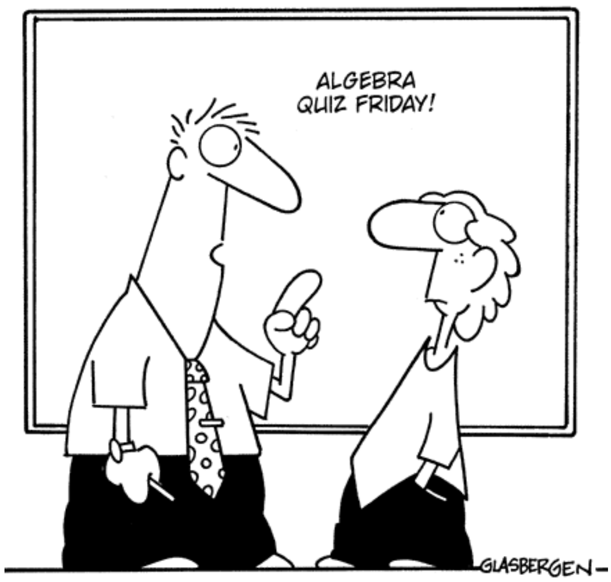
♦ **3.19** Soit a et b des réels tels que $0 < a < b$.
Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $ae^{-bx} - be^{-ax} > a - b$

♥ **3.20** Déterminer toutes les fonctions définies sur $\mathbb{R}^*$ et vérifiant la propriété :

$\mathcal{P}$: $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f(x) + 3f\left(\dfrac{1}{x}\right) = x^2$

♦ **3.21** Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, résoudre dans $\mathbb{R}$, $x^{x^n} = n$

On pourra commencer par se demander s'il y a des solutions.



"It's important to learn math because someday you might accidentally buy a phone without a calculator."