Programme de colles-semaine 4- 13/10 au 17/10

I. Fonctions usuelles 1

- cos, sin, tan, formules de trigo pour tangente.

II. Nombres complexes:

- $\mathbb{C} = \{a+ib, (a, b)\in\mathbb{R}^2\}$ et $i^2 = -1$, plan complexe.
- Addition et multiplication dans $\mathbb{C}$, égalité de Bernoulli, $1 + z + z^2 + ... + z^n = \dfrac{1-z^{n+1}}{1-z}$
- Conjugué, module, double inégalité triangulaire.
- Groupe des complexes de module 1, notation e^{ia}, formule d'Euler et de Moïvre, factoristation de $1 + e^{ia}$ et de $1 - e^{ia}$
- Application à la trigonométrie : transformation de produit en somme, de somme en produit et utilisation de l'angle moitié, factorisation de $a\cos x + b\sin x$ en $R\cos(x - \theta)$
- Exponentielle d'un nombre complexe.
- Equation du 2nd degré: racines carrées complexes, résolution de $az^2+bz+c = 0$, somme et produit des racines.
- Racines nièmes de 1 puis d'un nombre complexe.
- Equations polynomiales de degré $n \geq 2$, autres équations.
- Fonctions à valeurs complexes

Déroulement de la colle:

① Une équation ou une inéquation trigonométrique qui pourra mettre en jeu les nouvelles formules
Exemples : $\cos x + \sin x = -1$ $\qquad \sin(2x) + \sin(3x) = 0$ $\qquad \tan(x)\tan(2x) = 1$

② Une question de cours parmi

- Double inégalité triangulaire et preuve.
- Soit $\theta\in]-\pi, \pi]$ donner le module et un argument de $z_1 = 1 + e^{i\theta}$ ou de $z_2 = 1 - e^{i\theta}$.
- Définition, description et représentation dans le plan complexe des racines nièmes de 1. *On distinguera les cas n pair et n impair pour la représentation.*

③ Exercices sur les nombres complexes en commençant par un exercice inspiré des suivants

- Résoudre une équation du second degré
- Mettre sous forme exponentielle les complexes suivants sachant que $\alpha\in]-\pi;\pi]$ et $n\in\mathbb{N}$.

$-4(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ $\qquad 3(-\sin\alpha - i\cos\alpha)$ $\qquad 1 + \cos 2\alpha + i\sin 2\alpha$

- Résoudre dans $\mathbb{C}^2$: $\begin{cases} x+y = 1+i \\ xy = 2-i \end{cases}$
- Résoudre dans $\mathbb{C}$: $z^6 - (1 - i)z^3 - i = 0$ $\qquad 2z^3 - (1 + 2i)z^2 + (25i - 1)z + 13i = 0$ *une solution réelle*
- Soit $\omega = e^{i\frac{2\pi}{7}}$, $A = \omega + \omega^2 + \omega^4$ et $B = \omega^3 + \omega^5 + \omega^6$

a) Calculer $A + B$ puis AB.

b) En déduire les valeurs exactes de A et de B sous la forme $\dfrac{a+i\sqrt{b}}{c}$ avec $a, b, c\in\mathbb{Z}$

- Soit $u\in\mathbb{C}\setminus\{1\}$, montrer que : $\dfrac{z-u\bar{z}}{1-u}\in\mathbb{R} \Leftrightarrow z\in\mathbb{R}$ ou $u\in\mathbb{U}$
- Soit $z\in\mathbb{C}\setminus\{-1\}$, montrer que : $z\in\mathbb{U} \Leftrightarrow \exists x\in\mathbb{R},\ z = \dfrac{1+ix}{1-ix}$

Evaluation: Connaître son cours est une condition nécessaire pour obtenir une note > 10