Chapitre 5: Calcul de sommes et de produits-résumé

1. Calcul de sommes

1.1 le symbole $\sum$

Déf: Soit $(a_k)_{k\in E}$ une famille de nombres complexes indexée par un ensemble fini E
On note $\sum_{k\in E} a_k$ la somme de tous les éléments de la famille.

Remarque : l'indice k est muet, ainsi, $\sum_{k\in E} a_k = \sum_{i\in E} a_i = \sum_{j\in E} a_j = \cdots$

Convention : Si E = $\varnothing$ alors $\sum_{k\in E} a_k = 0$

✍ Cas particuliers usuels:

★ Si E = $[\![0, n]\!]$ où $n\in\mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{n} a_k = a_0 + a_1 + \ldots + a_n$

★ Si E = $[\![1, n]\!]$ où $n\in\mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$

★ Si E = $[\![p, n]\!]$ où n et $p\in\mathbb{Z}$, $p \le n$, $\sum_{k=p}^{n} a_k = a_p + a_{p+1} + \ldots + a_n$ et si $p > n$, $\sum_{k=p}^{n} a_k = 0$ par convention.

Propriétés immédiates: Soit n, $p\in\mathbb{Z}$ avec $p \le n$,

- $\sum_{k=p}^{n+1} a_k = \sum_{k=p}^{n} a_k + a_{n+1}$ $\qquad$ $\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{p} a_k + \sum_{k=p+1}^{n} a_k$, $1 \le p \le n$ $\qquad$ $\sum_{k=p}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{p-1} a_k$
- $\sum_{k=p}^{n} a_k + \sum_{k=p}^{n} b_k = \sum_{k=p}^{n} (a_k + b_k)$ $\qquad$ et $\qquad$ $\sum_{k=p}^{n} \lambda a_k = \lambda \sum_{k=p}^{n} a_k$ $\qquad$ *linéarité de la somme*

1.2 Sommes à connaître:

① Somme de termes constants:

$\boxed{\forall a\in\mathbb{C}, \forall n\in\mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} a = (n+1)a}$ $\qquad$ et $\qquad$ $\boxed{\forall a\in\mathbb{C}, \forall n, p\in\mathbb{Z}, p \le n, \sum_{k=p}^{n} a = (n-p+1)a}$

② Somme des entiers, des carrés des entiers, des cubes des entiers :

$\forall n\in\mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ ♥

$\forall n\in\mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ ♥

$\forall n\in\mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^{n} k^3 = 1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$ ♥

③ Sommes géométrique s:

$$\forall q\in\mathbb{C}, \sum_{k=0}^{n} q^k = 1 + q + q^2 + \ldots + q^n = \begin{cases} \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} = \dfrac{q^{n+1}-1}{q-1} & \text{si } q \ne 1 \\ n+1 \text{ si } q = 1 \end{cases}$$ ♥

✍ A savoir faire: Soit x un réel et $n\in\mathbb{N}$, calcul de $\sum_{k=0}^{n} \cos(kx)$ et $\sum_{k=0}^{n} \sin(kx)$.

1.3 Techniques de calcul

① **Changement d'indice** : Soit n, $p\in\mathbb{Z}$, $n \le p$

a. Translation: Soit $S = \sum_{k=p}^{n} a_k$, on pose j = k - p, on a k = j + p et $S = \sum_{j=0}^{n-p} a_{j+p}$.

Comme l'indice est muet, on peut écrire $S = \sum_{k=0}^{n-p} a_{k+p}$ (k ← k + p).

Application : $\sum_{k=p}^{n} q^k = \sum_{k=0}^{n-p} q^{k+p} = q^p \sum_{k=0}^{n-p} q^k == \begin{cases} q^p \times \dfrac{1-q^{n-p+1}}{1-q} \text{ si } q \neq 1 \\ n-p+1 \text{ si } q = 1 \end{cases}$ si q≠1, (n – p + 1) sinon.

On en déduit : Soit u une suite géométrique de raison q≠1, $\boxed{\sum_{k=p}^{n} u_k = u_p \dfrac{1-q^{n-p+1}}{1-q}}$

b. Symétrie: Soit $S = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k}$, le changement d'indice j = n - k donne $S = \sum_{j=0}^{n} a_j$ et comme l'indice est muet on peut écrire que: $S = \sum_{k=0}^{n} a_k$ (k ← n-k).

Application : Soit u une suite arithmétique de raisons r, $\boxed{\sum_{k=p}^{n} u_k = \dfrac{(n-p+1)\left(u_p + u_n\right)}{2}}$

✍ A savoir faire: Calcul de $\sum_{k=0}^{2n} \cos\left(\dfrac{k\pi}{2n}\right)$.

② **Sommation par paquets :**
Dans certains calculs, regrouper les termes par paquets permet de faire des simplifications. On peut, en particulier, regrouper les termes d'indices pairs et d'indices impairs :

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{\substack{k=m \\ k \text{ pair}}}^{n} a_k + \sum_{\substack{k=m \\ k \text{ impair}}}^{n} a_k = \sum_{\substack{m\le k\le n \\ k \text{ pair}}} a_k + \sum_{\substack{m\le k\le n \\ k \text{ impair}}} a_k = \sum_{m\le 2k\le n} a_{2k} + \sum_{m\le 2k+1\le n} a_{2k+1}$$

③ **Somme télescopique :**
Une somme télescopique est une somme pouvant s'écrire sous la forme:
$S_1 = \sum_{k=p}^{n} \left(a_{k+1} - a_k\right)$ ou $S_2 = \sum_{k=p}^{n} \left(a_k - a_{k+1}\right)$.
Dans ce cas on a les simplifications respectives :
$S_1 = a_{n+1} - a_p$ $S_2 = a_p - a_{n+1}$

✍ A savoir faire: Calcul de $\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k(k+1)}$

Egalité de Bernoulli :
$\forall a, b\in\mathbb{C}, \forall n\in\mathbb{N}^*, a^n - b^n = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k}b^k = \cdots = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}$ ♥

Applications :

$\forall a, b\in\mathbb{C}, a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

$\forall n\in\mathbb{N}^*, \forall x\in\mathbb{C}, x^n - 1 = (x-1)\sum_{k=0}^{n-1} x^k$

$\forall p\in\mathbb{N}, \forall x\in\mathbb{C}, x^{2p+1} + 1 = x^{2p+1} - (-1)^{2p+1} = (x+1)\sum_{k=0}^{2p} (-1)^{2p-k} x^k$

---

2. Produits

2.1 le symbole $\prod$

Déf: Soit $(a_k)_{k\in E}$ une famille de nombres complexes indexée par un ensemble fini E.

On note $\prod_{k\in E} a_k$ le produit de tous les éléments de la famille.

Remarque : l'indice k est muet, ainsi, $\prod_{k\in E} a_k = \prod_{i\in E} a_i = \prod_{j\in E} a_j = \cdots$

Convention : Si E = $\varnothing$ alors $\prod_{k\in E} a_k = 1$

Cas particuliers usuels:

★ Si E = $[\![0, n]\!]$ où $n\in\mathbb{N}$, $\prod_{k=0}^{n} a_k = a_0 \times a_1 \times\ldots\times a_n$

★ Si E = $[\![1, n]\!]$ où $n\in\mathbb{N}$, $\prod_{k=1}^{n} a_k = a_1 \times a_2 \times\ldots\times a_n$

★ Si E = $[\![p, n]\!]$ où n et $p\in\mathbb{Z}$, $p\leq n$, $\prod_{k=p}^{n} a_k = a_p \times a_{p+1} \times\ldots\times a_n$ et si $p > n$, $\prod_{k\in E} a_k = 1$ par convention.

Propriétés immédiates: On donne n, p, m entiers, $p\leq m\leq n$ et α,λ des réels.

- $\exists k\in E, a_k = 0 \Rightarrow \prod_{k\in E} a_k = 0$
- $\prod_{k=p}^{n+1} a_k = a_{n+1}\prod_{k=p}^{n} a_k$ $\qquad$ $\prod_{k=p}^{n} a_k = \prod_{k=p}^{m} a_k \prod_{k=m+1}^{n} a_k$
- $\prod_{k=p}^{n} a_k . \prod_{k=p}^{n} b_k = \prod_{k=p}^{n} a_k b_k$ $\qquad$ $(\prod_{k=p}^{n} a_k)^\alpha = \prod_{k=p}^{n} (a_k)^\alpha$ $\quad$ $\prod_{k=p}^{n} \lambda a_k = \lambda^{n-p+1}\prod_{k=p}^{n} a_k$

2.2 Produits à connaître:

① **Produit de facteurs constants.** Soit a un nombre complexe, $\boxed{\prod_{k=p}^{n} a = a^{n-p+1}}$

② **Factorielle (de) n** : Soit n un entier naturel, n ≥ 1, la factorielle de n est l'entier :

$n! = \prod_{k=1}^{n} k = 1 \times 2 \times \ldots n$ ♥

Par convention, on pose $0! = \prod_{k=0}^{n} k = 1$. $\qquad$ On a $\boxed{\forall n\in\mathbb{N}, (n + 1)! = (n + 1) \times n!}$

✍ A savoir faire : Calcul de $\prod_{k=1}^{n} (2k)$ et $\prod_{k=0}^{n} (2k+1)$

2.3 Techniques de calcul

① **Changement d'indice:** Même chose que pour les sommes.

② **Produit télescopique:** Un produit télescopique est un produit de facteurs pouvant s'écrire sous la forme: $P = \prod_{k=p}^{n} \frac{a_{k+1}}{a_k}$ ou $P = \prod_{k=p}^{n} \frac{a_k}{a_{k+1}}$.

On a alors après simplification $P = \frac{a_{n+1}}{a_p}$ et $P = \frac{a_p}{a_{n+1}}$.

---

3. Formule du binôme et applications

3.1 Les coefficients binomiaux :

Def : Soit $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{Z}$, le coefficient binomial « k parmi n » est l'entier naturel défini par $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ si $0 \leq k \leq n$ et $\binom{n}{k} = 0$ si $k < 0$ ou $k > n$

✍ Exemples: Calculer $\binom{10}{3}$.

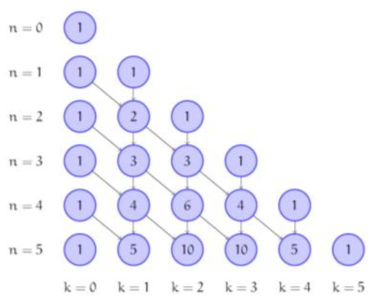
Propriétés: Soit $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{Z}$,

① $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ en particulier: $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ et $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$ ♥

② $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$ *relation de Pascal* ♥

③ Si $1 \leq k \leq n$, $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$ *formule du capitaine* ♥

Application: triangle de Pascal : La valeur dans une case s'obtient en addditionnant la valeur de le case au dessus et celle de la case au-dessus à gauche



Remarque : On peut montrer que lorsque $k \in [\![0, n]\!]$, la formule définissant $\binom{n}{k}$ donne bien un entier naturel, en raisonnant par récurrence sur n (numéro de la ligne dans le triangle).

3.2 Formule du binôme de Newton:

Théorème 5.1 : Soit a et $b \in \mathbb{C}$, et $n \in \mathbb{N}$, $(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$ ♥

✍ Démo par récurrence sur n *A savoir refaire.*

Dans la pratique: On utilise le triangle de Pascal pour obtenir les coefficients.

2.3 Des applications

① **Calcul de sommes** :

✍ *A savoir retrouver et justifier* : $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$ et $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$ ♥

② **Transformation d'expressions trigonométriques**

★ Linéarisation de $\cos^p\sin^q$: On utilise les formules d'Euler puis on développe en utilisant la formule du binôme, enfin on regroupe les termes pour faire apparaître des cos(*ka)* et sin(*ka)* grâce aux formules d'Euler.

Exemples : $\cos^3 a = \left(\dfrac{e^{ia}+e^{-ia}}{2}\right)^3 = \dfrac{1}{4}\cos(3a)+\dfrac{3}{4}\cos a$ et $\sin^3 a = \left(\dfrac{e^{ia}-e^{-ia}}{2i}\right)^3 = -\dfrac{1}{4}\sin(3a)+\dfrac{3}{4}\sin a$

★ Délinéarisation de cos(px) ou de sin(qx) : On utilise la formule de Moïvre puis on développe le membre de gauche en utilisant la formule du binôme puis on identifie les parties réelles et imaginaires.

Exemples: $\cos(3a) = 4\cos^3 a - 3\cos a$ et $\sin(3a) = -4\sin^3 a + 3\sin a$

---

4. Sommes doubles

On considère une famille de nombres complexes ($a_{i,\, j}$) doublement indexées par des entiers i et j

4.1 Somme sur un rectangle:

On suppose que (i, j) vérifie de manière indépendante p ≤ i ≤ n et q ≤ j ≤ m.

Définition et propriété : Soit E = ⟦p, n⟧x⟦q, m⟧, on note $\sum\limits_{\substack{p\le i\le n\\ q\le j\le m}} a_{i,j}$ la somme des éléments de la famille $(a_{i,j})_{(i,j)\in E}$. On a $\sum\limits_{\substack{p\le i\le n\\ q\le j\le m}} a_{i,j} = \sum\limits_{i=p}^{n}\sum\limits_{j=q}^{m} a_{i,j} = \sum\limits_{j=q}^{m}\sum\limits_{i=p}^{n} a_{i,j}$

Remarques :

Si p = q = 1, $\sum\limits_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le m}} a_{i,j} = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{m} a_{i,j} = \sum\limits_{j=1}^{m}\sum\limits_{i=1}^{n} a_{i,j}$

Si p = q = 1 et m = n $\sum\limits_{1\le i,j\le n} a_{i,j} = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} a_{i,j} = \sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{i=1}^{n} a_{i,j}$

Dans la pratique : On peut retenir le principe suivant :
Si les deux champs d'indices sont indépendants alors on peut inverser l'ordre de sommation sans modifier les bornes des sommes.

Cas particulier : Si les indices i et j sont « séparables », on a :

$$\sum_{1\le i,j\le n} a_i b_j = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i b_j = \sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{j=1}^{n} b_j = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} b_j\right)$$

4.2 Somme triangulaire

On suppose que les indices i et j ne sont pas indépendants et vérifient des inégalités du type

p ≤ i ≤ j ≤ n ou p ≤ i < j ≤ n ou p ≤ j ≤ i ≤ n ou encore p ≤ i < j ≤ n

Définition et propriété :

① Soit E = { (i, j), $p \leq i \leq j \leq n$}, on note $\sum\limits_{p\leq i\leq j\leq n} a_{i,j}$ la somme des éléments de la famille $(a_{i,j})_{(i,j)\in E}$.

On a $\sum\limits_{p\leq i\leq j\leq n} a_{i,j} = \sum\limits_{i=p}^{n}\sum\limits_{j=i}^{n} a_{i,j} = \sum\limits_{j=p}^{n}\sum\limits_{i=p}^{j} a_{i,j}$

② Soit E = { (i, j), $p \leq i < j \leq n$}, on note $\sum\limits_{p\leq i< j\leq n} a_{i,j}$ la somme des éléments de la famille $(a_{i,j})_{(i,j)\in E}$.

On a $\sum\limits_{p\leq i< j\leq n} a_{i,j} = \sum\limits_{i=p}^{n-1}\sum\limits_{j=i+1}^{n} a_{i,j} = \sum\limits_{j=p+1}^{n}\sum\limits_{i=p}^{j-1} a_{i,j}$

Les autres cas s'en déduisent

Dans la pratique : On peut retenir que lorsque les champs d'indice sont liés, pour inverser l'ordre de sommation, **il faut modifier les bornes pour respecter les contraintes sur les indices**.