

Programme de colles-semaine 5- 3/11 au 7/11

I. Nombres complexes

II. Calculs de sommes et de produits

- La notation $\sum_{k \in E} a_k$, où E est un ensemble fini d'indices et (a_k) une famille de complexes

Propriétés, sommes à connaître, techniques de calcul : changement d'indice, séparation des termes d'indice pairs et impairs, télescopage.

- La notation $\prod_{k \in E} a_k$, où E est un ensemble fini d'indices et (a_k) une famille de complexes.

Propriétés, produit à connaître, techniques de calcul : changement d'indice, télescopage.

- Coefficients binomiaux, définition et propriétés. Formule du binôme de Newton et applications à la trigonométrie.

- Calcul de sommes doubles $\sum_{p \leq i, j \leq n} a_{i,j}$, $\sum_{p \leq i \leq j \leq n} a_{i,j}$ ou $\sum_{p \leq i < j \leq n} a_{i,j}$.

Déroulement de la colle:

① Donner deux formules du formulaire n°1 en page 2

② Une question de cours parmi

- Définition, description et représentation dans le plan complexe des racines nièmes de 1.
On distinguera les cas n pair et n impair pour la représentation.
- Énoncé et démonstration de la formule du binôme de Newton
- Calcul de $\sum_{k=0}^n \cos(kx)$ et de $\sum_{k=0}^n \sin(kx)$ où x est un réel.

③ Exercices sur les nombres complexes en particuliers les racines nièmes et les sommes ou produits simples

- Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, résoudre dans $\mathbb{C}$

a) $z^n = 1 + i$ b) $(z + 1)^n = (z - 1)^n$

- Soit θ un réel, résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - 2z \cos \theta + 1 = 0$

En déduire les solutions de $z^{2n} - 2z^n \cos \theta + 1 = 0$ où $n \in \mathbb{N}^*$

- Soit $\omega = e^{i\frac{2\pi}{7}}$, $A = \omega + \omega^2 + \omega^4$ et $B = \omega^3 + \omega^5 + \omega^6$

Calculer $A + B$ puis AB , en déduire les valeurs exactes de A et de B sous la forme $\frac{a + i\sqrt{b}}{c}$

- Exemples de calcul faits en classe

$$S_1 = \sum_{k=1}^n k(n+1-k) \quad S_2 = \sum_{k=0}^n \frac{2^{k-1}}{3^k} \quad S_5 = \sum_{k=1}^n k \times k! \quad S_6 = \sum_{k=0}^n \frac{k}{(k+1)!}$$

$$S_7 = \sum_{k=1}^n \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2} \quad S_8 = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{2}{k+1} + \frac{1}{k+2} \right) \quad S_9 = \sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{1}{k} \right)$$

$$P_1 = \prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k^2} \right) \quad P_2 = \prod_{k=0}^n 2^k 3^{-k} \quad P_3 = \prod_{k=1}^n \frac{2k+3}{2k-1}$$

$$A = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 3^k, \quad B = \sum_{k=1}^n \frac{\binom{n}{k}}{2^k}, \quad C = \sum_{k=1}^n 2^{k-1} 3^{n-k+1} \binom{n}{k}, \quad D = \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1}, \quad E = \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k}$$

Formulaire 1

1. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z}, (\lfloor x \rfloor = n \Leftrightarrow n \leq x < n+1)$
2. Sous réserve d'existence, $(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$
3. Sous réserve d'existence, $(g \circ f)' = f' \times (g' \circ f)$
4. $\forall a, b \in \mathbb{R}, \quad \cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$
 $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$
5. $\forall a \in \mathbb{R}, \quad \cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - \sin^2 a$
 $\sin(2a) = 2\cos a \sin a$
6. Sous réserve d'existence : $\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$
 $\tan(2a) = \frac{2\tan a}{1 - \tan^2 a}$
7. Sous réserve d'existence : $\cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ et $\sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}$ où $t = \tan \frac{x}{2}$
8. $\forall a, b \in \mathbb{R}, \quad \cos a + \cos b = 2\cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}$
 $\cos a - \cos b = -2\sin \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}$
 $\sin a + \sin b = 2\cos \frac{a-b}{2} \sin \frac{a+b}{2}$
 $\sin a - \sin b = 2\sin \frac{a-b}{2} \cos \frac{a+b}{2}$
9. $\forall a, b \in \mathbb{R} \quad \cos a \cos b = \frac{1}{2}(\cos(a-b) + \cos(a+b))$
 $\sin a \sin b = \frac{1}{2}(\cos(a-b) - \cos(a+b))$
 $\sin a \cos b = \frac{1}{2}(\sin(a-b) + \sin(a+b))$
10. $\forall a, b \in \mathbb{R}, \exp(a+b) = \exp(a)\exp(b)$
 $\forall a, b \in \mathbb{R}^*, \ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$
11. $\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x \geq x+1, \quad \forall x > 0, \ln(x) \leq x-1 \quad \forall x \in \mathbb{R}, |\sin(x)| \leq |x|$
12. $\forall a \in \mathbb{R}^*, \forall b \in \mathbb{R}, a^b = e^{b \ln(a)}$
13. Soit α fixé dans $\mathbb{R}$, $f_\alpha : x \mapsto x^\alpha$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et $f'_\alpha(x) = \alpha x^{\alpha-1}$
14. $\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ et $\operatorname{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$
15. ch est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\operatorname{ch}' = \operatorname{sh}$
 sh est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\operatorname{sh}' = \operatorname{ch}$
16. $\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{ch}^2(x) - \operatorname{sh}^2(x) = 1, \operatorname{ch}(x) + \operatorname{sh}(x) = e^x$ et $\operatorname{ch}(x) - \operatorname{sh}(x) = e^{-x}$
17. $\forall z, z' \in \mathbb{C} \quad \left| |z| - |z'| \right| \leq |z + z'| \leq |z| + |z'|$

$$18. \forall z, z' \in \mathbb{C}, \quad z + \bar{z} = 2\operatorname{Re}(z) \quad z - \bar{z} = 2i\operatorname{Im}(z) \quad |z|^2 = z\bar{z}$$

$$19. \forall z \in \mathbb{C}, \quad z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \operatorname{Im}(z) = 0 \Leftrightarrow z = \bar{z} \text{ et } z \in \mathbb{R}^* \Leftrightarrow \arg(z) = k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \operatorname{Re}(z) = 0 \Leftrightarrow z = -\bar{z} \text{ et } z \in i\mathbb{R}^* \Leftrightarrow \arg(z) = \pi/2 + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$20. \forall \theta \in \mathbb{R} \quad 1 + e^{i\theta} = 2\cos\frac{\theta}{2}e^{i\frac{\theta}{2}} \quad 1 - e^{i\theta} = -2i\sin\frac{\theta}{2}e^{i\frac{\theta}{2}}$$

21. Si z_1 et z_2 sont les solutions, éventuellement confondues de $az^2 + bz + c$ avec $a \neq 0$.

$$\text{alors } S = z_1 + z_2 = -\frac{b}{a} \text{ et } P = z_1 z_2 = \frac{c}{a}$$

$$22. \text{ Soit } S \text{ et } P \text{ fixés dans } \mathbb{C}, \quad \begin{cases} z_1 + z_2 = S \\ z_1 z_2 = P \end{cases} \Leftrightarrow z_1 \text{ et } z_2 \text{ racines de } Z^2 - SZ + P = 0$$

$$23. \mathbb{U}_n = \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\} = \{e^{i2k\pi/n}, k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket\} = \{1, \omega, \omega^2, \dots, \omega^{n-1}\} \text{ avec } \omega = e^{i2\pi/n}.$$

$$24. \sum_{z \in \mathbb{U}_n} z = \sum_{k=0}^{n-1} e^{i\frac{2k\pi}{n}} = 0$$

$$25. \quad j = e^{i2\pi/3} \quad j^3 = 1 \quad \mathbb{U}_3 = \{1, j, j^2\} \quad 1 + j + j^2 = 0 \quad j^2 = \bar{j}$$

$$26. \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^n k = 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} \\ \sum_{k=1}^n k^2 = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ \sum_{k=1}^n k^3 = 1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

$$27. \forall q \in \mathbb{C}, \quad \sum_{k=0}^n q^k = 1 + q + q^2 + \dots + q^n = \begin{cases} \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} & \text{si } q \neq 1 \\ n + 1 & \text{si } q = 1 \end{cases}$$

$$28. \forall a, b \in \mathbb{C}, \forall n \in \mathbb{N}^*, a^n - b^n = (a - b) \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} b^k = (a - b) \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}$$

$$29. \text{ Soit } n \in \mathbb{N} \text{ et } k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} \text{ et } \binom{n}{k} = \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1}$$

$$30. \text{ Soit } a \text{ et } b \in \mathbb{C}, \text{ et } n \in \mathbb{N}, \quad (a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

$$a = b = 1 \text{ donne } \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n \quad a = 1 \text{ et } b = -1 \text{ donne } \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k = 0$$