Programme de colles-semaine 6- 10/11 au 14/11

Les colles du 11/11 doivent être rattrapées

I. Calculs de sommes et de produits

• La notation $\sum\limits_{k\in E} a_k$, où E est un ensemble fini d'indices et (a_k) une famille de complexes

Propriétés, sommes à connaître, techniques de calcul : changement d'indice, séparation des termes d'indice pairs et impairs, télescopage.

• La notation $\prod\limits_{k\in E} a_k$, où E est un ensemble fini d'indices et (a_k) une famille de complexes.

Propriétés, produit à connaître, techniques de calcul : changement d'indice, télescopage.
• Coefficients binomiaux, définition et propriétés. Formule du binôme de Newton et applications à la trigonométrie.

• Calcul de sommes doubles $\sum\limits_{p\le i,j\le n} a_{i,j}$, $\sum\limits_{p\le i\le j\le n} a_{i,j}$ ou $\sum\limits_{p\le i<j\le n} a_{i,j}$.

II. Calcul d'intégrales et de primitives

• Rappel de Terminale et extension aux fonctions à valeurs complexes.

Si f est continue sur I et si $a\in I$, $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ est la primitive de f sur I qui s'annule en a.

La notation $\int^x f(t)dt$ désigne une primitive quelconque de f sur I.

• Calcul d'intégrales à l'aide de primitives usuelles et par transformation algébrique de la fonction à intégrer.

• Formule d'intégration par parties, Application au calcul d'intégrales et de primitives.

• Théorème de changement de variable et application au calcul d'intégrales et de primitive

La théorie de l'intégration sera vue ultérieurement
Nous n'avons pas encore vu les fonctions trigo réciproques
Les DES doivent être guidés

Déroulement de la colle:

① Donner deux formules du formulaire n°1 en page 2

② Donner une primitive en reconnaissant une forme usuelle ou en transformant l'expression pour les fonctions du type $f : x \mapsto \cos^p x \sin^q x$ ou $f : x \mapsto e^{ax}\cos(bx)$

③ Une question de cours parmi

- Enoncé et démonstration de la formule du binôme de Newton
- Calcul de $\sum\limits_{k=0}^{n}\cos(kx)$ et de $\sum\limits_{k=0}^{n}\sin(kx)$ où x est un réel.
- Enoncer la formule d'intégration par parties et proposer un exemple
- Calculer une intégrale ou une primitive en utilisant un changement de variable proposé par le colleur

④ Exercice sur les sommes, produits, racines nièmes….

Formulaire 1

1. $\forall x\in\mathbb{R},\ \forall n\in\mathbb{Z},\ \left(\lfloor x\rfloor = n \Leftrightarrow n \le x < n+1\right)$

2. Sous réserve d'existence, $\left(f^{-1}\right)' = \dfrac{1}{f'\circ f^{-1}}$

3. Sous réserve d'existence, $\left(g\circ f\right)' = f'\times\left(g'\circ f\right)$

4. $\forall a,b\in\mathbb{R}$, $\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b$
   $\sin(a+b) = \sin a\cos b + \cos a\sin b$

5. $\forall a\in\mathbb{R}$, $\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - \sin^2 a$
   $\sin(2a) = 2\cos a\sin a$

6. Sous réserve d'existence : $\tan(a+b) = \dfrac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a\tan b}$

   $\tan(2a) = \dfrac{2\tan a}{1-\tan^2 a}$

7. Sous réserve d'existence : $\cos(x) = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ et $\sin(x) = \dfrac{2t}{1+t^2}$ où $t = \tan\dfrac{x}{2}$

8. $\forall a,b\in\mathbb{R}$, $\cos a + \cos b = 2\cos\dfrac{a-b}{2}\cos\dfrac{a+b}{2}$

   $\cos a - \cos b = -2\sin\dfrac{a-b}{2}\sin\dfrac{a+b}{2}$

   $\sin a + \sin b = 2\cos\dfrac{a-b}{2}\sin\dfrac{a+b}{2}$

   $\sin a - \sin b = 2\sin\dfrac{a-b}{2}\cos\dfrac{a+b}{2}$

9. $\forall a,b\in\mathbb{R}$ $\cos a\cos b = \dfrac{1}{2}\left(\cos(a-b)+\cos(a+b)\right)$

   $\sin a\sin b = \dfrac{1}{2}\left(\cos(a-b)-\cos(a+b)\right)$

   $\sin a\cos b = \dfrac{1}{2}\left(\sin(a-b)+\sin(a+b)\right)$

10. $\forall a, b\in\mathbb{R}$, $\exp(a+b) = \exp(a)\exp(b)$
    $\forall a, b\in\mathbb{R}_+^*$, $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$

11. $\forall x\in\mathbb{R}$, $e^x \ge x + 1$, $\forall x > 0$, $\ln(x) \le x - 1$ $\forall x\in\mathbb{R}$, $|\sin(x)| \le |x|$

12. $\forall a\in\mathbb{R}_+^*$, $\forall b\in\mathbb{R}$, $a^b = e^{b\ln(a)}$

13. Soit α fixé dans $\mathbb{R}$, $f_\alpha : x \mapsto x^\alpha$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et $f_\alpha'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$

14. $\forall x\in\mathbb{R}$, $\mathrm{ch}(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ et $\mathrm{sh}(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

15. ch est dérivable sur $\mathbb{R}$ et ch' = sh
    sh est dérivable sur $\mathbb{R}$ est sh' = ch

16. $\forall x\in\mathbb{R}$, $\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x) = 1$, $\mathrm{ch}(x) + \mathrm{sh}(x) = e^x$ et $\mathrm{ch}(x) - \mathrm{sh}(x) = e^{-x}$

17. $\forall z, z'\in\mathbb{C}$ $\left||z|-|z'|\right| \le |z+z'| \le |z|+|z'|$

18. $\forall z, z' \in \mathbb{C}$, $z + \bar{z} = 2\mathrm{Re}(z)$ $z - \bar{z} = 2i\,\mathrm{Im}(z)$ $|z|^2 = z\bar{z}$

19. $\forall z \in \mathbb{C}$, $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \mathrm{Im}(z) = 0 \Leftrightarrow z = \bar{z}$ et $z \in \mathbb{R}^* \Leftrightarrow \arg(z) = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

$z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \mathrm{Re}(z) = 0 \Leftrightarrow z = -\bar{z}$ et $z \in i\mathbb{R}^* \Leftrightarrow \arg(z) = \pi/2 + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

20. $\forall \theta \in \mathbb{R}$ $1 + e^{i\theta} = 2\cos\frac{\theta}{2} e^{i\frac{\theta}{2}}$ $1 - e^{i\theta} = -2i\sin\frac{\theta}{2} e^{i\frac{\theta}{2}}$

21. Si z_1 et z_2 sont les solutions, éventuellement confondues de $az^2 + bz + c$ avec $a \neq 0$.

alors $S = z_1 + z_2 = -\frac{b}{a}$ et $P = z_1 z_2 = \frac{c}{a}$

22. Soit S et P fixés dans $\mathbb{C}$, $\begin{cases} z_1 + z_2 = S \\ z_1 z_2 = P \end{cases} \Leftrightarrow$ z_1 et z_2 racines de $Z^2 - SZ + P = 0$

23 $\mathbb{U}_n = \{ z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1 \} = \{ e^{i2k\pi/n}, k \in [\![0, n-1]\!] \} = \{ 1, \omega, \omega^2, \dots, \omega^{n-1} \}$ avec $\omega = e^{i2\pi/n}$.

24. $\displaystyle\sum_{z \in \mathbb{U}_n} z = \sum_{k=0}^{n-1} e^{i\frac{2k\pi}{n}} = 0$

25. $j = e^{i2\pi/3}$ $j^3 = 1$ $\mathbb{U}_3 = \{1, j, j^2\}$ $1 + j + j^2 = 0$ $j^2 = \bar{j}$

26. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = 1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

27. $\forall q \in \mathbb{C}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k = 1 + q + q^2 + \dots + q^n = \begin{cases} \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{si } q \neq 1 \\ n+1 & \text{si } q = 1 \end{cases}$

28. $\forall a, b \in \mathbb{C}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a^n - b^n = (a-b)\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} b^k = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}$

29. Soit $n \in$ et $k \in [\![1, n]\!]$, $\dbinom{n}{k} = \dbinom{n-1}{k} + \dbinom{n-1}{k-1}$ et $\dbinom{n}{k} = \dfrac{n}{k}\dbinom{n-1}{k-1}$

30. Soit a et $b \in \mathbb{C}$, et $n \in \mathbb{N}$, $(a+b)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$

$a = b = 1$ donne $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$ $a = 1$ et $b = -1$ donne $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k = 0$