Chapitre 6: Calcul d'intégrales et de primitives-résumé

Dans ce chapitre I désigne <u>un intervalle de $\mathbb{R}$ non trivial</u> et $\mathbb{K}$ l'ensemble des réels ou des complexes.

1. Des rappels

1.1 Primitive

Déf: Soit f et F des fonctions de I dans $\mathbb{K}$, F est une primitive de f sur I lorsque F est dérivable sur I et $\forall x \in I$, $F'(x) = f(x)$.

Proposition 6.1 : Si f admet une primitive sur I alors elle en admet une infinité toutes égales à une constante près.

Proposition 6.2: Soit f et g $\in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})$, F une primitive de f sur I et G une primitive de g sur I.

① $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $(\alpha F + \beta G)$ est une primitive de $(\alpha f + \beta g)$ sur I.

② Re(F) (resp. Im(F)) est une primitive sur I de Re(f) (resp. Im(f)).

★ Primitives usuelles : cf fiche primitive 1

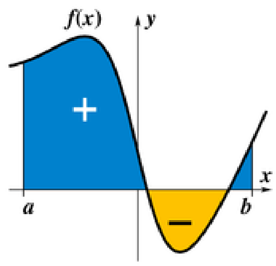
★ Primitives de $f : t \mapsto \cos^p t \sin^q t$ *on fait apparaître $u'u^n$*
Si p et q sont pairs, on linéarise, sinon on fait apparaître des termes du type $u'u^n$

★ Primitives de $f : x \mapsto \cos(\omega x)e^{\alpha x}$ ou $f : x \mapsto \cos(\omega x)e^{\alpha x}$ avec ω et α réels

On écrit $f(x) = \mathrm{Re}\left(e^{(\alpha+i\omega)x}\right)$ ou $\mathrm{Im}\left(e^{(\alpha+i\omega)x}\right)$ et on a $F(x) = \mathrm{Re}\left(\dfrac{e^{(\alpha+i\omega)x}}{\alpha+i\omega}\right)$ ou $\mathrm{Im}\left(\dfrac{e^{(\alpha+i\omega)x}}{\alpha+i\omega}\right)$

1.2 Intégrale d'une fonction continue sur un segment

Rappel: Soit a, $b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, une fonction continue. Comme en Terminale, nous considérons pour l'instant que l'intégrale de a à b de f est <u>le réel</u> noté $\int_a^b f(t)dt$ qui est égal à l'aire algébrique du domaine délimité par la courbe représentative de f, l'axe (Ox) et les droites x = a et x = b, exprimée en unité d'aire



• **Extension à deux réels a et b quelconque** : Si b < a, on pose $\int_a^b f(t)dt = -\int_b^a f(t)dt$

• **Extension aux fonctions à valeurs complexes** : Soit $f \in \mathcal{F}(I,\mathbb{C})$ est continue, pour tout réel a et b de I, on pose $\int_a^b f(t)dt = \int_a^b \mathrm{Re}(f)(t)dt + i\int_a^b \mathrm{Im}(f)(t)dt$

L'intégrale de Riemann sera définie formellement et étudiée dans une chapitre ultérieur

★ Remarque : La variable d'intégration est muette i.e. $\int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(u)du = \ldots$

Proposition 6.3 : **Propriétés de l'intégrale:**
Soit f et g continues sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$ et a, b et c trois réels de I.

① $\int_a^a f(t)dt = 0$ et $\int_a^b f(t)dt = -\int_b^a f(t)dt$ *Convention*

② Relation de Chasles: $\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$ *admis ici*

③ Linéarité: $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \int_a^b \left[\alpha f(t) + \beta g(t)\right]dt = \alpha \int_a^b f(t)dt + \beta \int_a^b g(t)dt$ *admis ici*

④ Positivité: Si a ≤ b et f ≥ 0 sur [a, b] alors $\int_a^b f(t)dt \geq 0$ *admis ici*

⑤ Croissance de l'intégrale: Si a ≤ b et f ≤ g sur [a, b] alors $\int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b g(t)dt$

⑥ Inégalité triangulaire: Si a ≤ b alors $\left|\int_a^b f(t)dt\right| \leq \int_a^b |f(t)|dt$

1.3 Lien entre intégrales et primitives d'une fonction

Théorème fondamental de l'analyse : Soit f une fonction continue sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$,
$F : x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ est l'unique primitive de f sur I qui s'annule en a.

Admis dans ce chapitre

★ Conséquences :

• Toute fonction continue sur I admet une infinité de primitives sur I.
Soit a fixé dans I, l'ensemble des primitives de f sur I est { $x \mapsto \int_a^x f(t)dt + k$, k décrit $\mathbb{K}$ }.

Soit G une primitive quelconque de f sur I et a∈I, on a : ∀x∈I, $G(x) = G(a) + \int_a^x f(t)dt$

• Si f est continue sur I, la notation : $\int^x f = \int^x f(t)dt$ désigne une primitive quelconque de f sur I. Par exemple, $\int^x e^{-t}dt = -e^{-x}$

• Voici quelques exemples de fonctions dont il ne faudra pas chercher à calculer une primitive. En effet, il est impossible d'expliciter leurs primitives à l'aide des fonctions usuelles :
$x \mapsto e^{\pm x^2}$ $\quad x \mapsto \frac{1}{\ln x}$ $\quad x \mapsto \frac{\sin x}{x}$.

On utilisera la notation $x \mapsto \int^x e^{t^2}dt$ pour exprimer une primitive de $x \mapsto e^{x^2}$

Corollaire 6.1 : Soit f une fonction continue sur I,
∀ a, b∈I, $\int_a^b f(t)dt = \left[F(t)\right]_a^b = F(b) - F(a)$ où F est une primitive quelconque de f sur I.

2. Formule d'intégration par parties.

Théorème 6.1: Si u et v sont deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur I alors
∀ x∈I, $\int^x u(t)v'(t)dt = u(x)v(x) - \int^x u'(t)v(t)dt$

Remarque : L'application de cette formule au calcul d'intégrale donne

Si u et v sont deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur I alors

$$\forall\, a, b \in I,\ \int_a^b u(t)v'(t)dt = \Big[u(t)v(t)\Big]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)dt$$

✍ Exemples classiques d'utilisation

- Calculer $\displaystyle\int_0^1 \underset{\downarrow}{x}\,\overset{\uparrow}{e^x}\,dx == \Big[xe^x\Big]_0^1 - \int_0^1 1\times e^x dt = \dots$

- Calculer pour tout $x\in]0, +\infty[$, $\displaystyle\int_1^x \overset{\uparrow}{t^2}\,\underset{\downarrow}{\ln t}\,dt = \left[\frac{t^3}{3}\ln t\right]_1^x - \int_1^x \frac{t^3}{3}\times\frac{1}{t}dt = \dots$

- Calculer pour tout $x\in]0, +\infty[$, $\displaystyle\int^x \ln t dt = \int^x \overset{\uparrow}{1}\times\underset{\downarrow}{\ln t}\,dt = \Big[t\times\ln t\Big]^x - \int^x t\times\frac{1}{t}dt = x\ln(x) - x$

---

3. Formule de changement de variable

3.1 La formule

Théorème 6.2: Soit f continue sur I et $\varphi:[a, b]\to I$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur [a,b].

On a $$\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)dx \underset{t=\varphi(x)}{=} \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)dt$$

3.2 Application au calcul d'intégrales et de primitives:

Méthode :
- On choisit le changement de variable
- On échange t et $\varphi(x)$
- On échange dt et $\varphi'(x)dx$.
- On modifie les bornes de l'intégrale.

✍ Exemple 1 : Calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x}dx$ en posant cosx = t

t = cos(x) = φ(x) donc dt = -sin(x) dx et $x\left|\begin{matrix}\pi/4\\0\end{matrix}\right.$ donc $t\left|\begin{matrix}\sqrt{2}/2\\1\end{matrix}\right.$

φ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ donc on peut appliquer ce changement de variable

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin^3 x}{\cos^2 x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\times\sin x.dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}\times\sin x.dx \underset{t=\cos x}{=} \int_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\frac{1-t^2}{t^2}\times(-dt) = \dots$$

✍ Exemple 2: $\displaystyle\int_0^1\sqrt{1-t^2}dt$ en posant t = sinx

t = sin(x) = φ(x) donc dt = cos(x) dx et $t\left|\begin{matrix}1\\0\end{matrix}\right.$ donc $x\left|\begin{matrix}\pi/2\\0\end{matrix}\right.$

φ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ donc on peut appliquer ce changement de variable

$$\int_0^1\sqrt{1-t^2}dt \underset{t=\sin x}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin^2 x}\times\cos x dx = \dots.$$

♥ Un changement de variable à connaître

Lorsqu'on cherche les primitives d'un quotient de fonctions trigonométriques, on peut utiliser le changement de variable u = tan(t/2) et utiliser les formules de trigonométrie :

$\cos t = \dfrac{1-u^2}{1+u^2}$ et $\sin t = \dfrac{2u}{1+u^2}$

✎ Exemple : Expliciter $\displaystyle\int^x \frac{dt}{1+\sin t}$ sur I =]-π ;π[.

u = tan(t/2) = φ(t) donc $du = \dfrac{1}{2}(1+\tan^2\dfrac{t}{2})dt = \dfrac{1}{2}(1+u^2)dt$ et donc $dt = \dfrac{2du}{1+u^2}$

$t\Big|^{x}$ donc $u\Big|^{\tan(x/2)}$

φ est de classe C^1 sur I, donc on peut appliquer ce changement de variable

$$\int^x \frac{dt}{1+\sin t} \underset{u=\tan\frac{t}{2}}{=} \int^{\tan(x/2)} \frac{1}{1+\dfrac{2u}{1+u^2}} \times \frac{2du}{1+u^2} = ...$$