Fiche-Equations différentielles linéaires.

Dans ce qui suit, I désigne un **intervalle non trivial** et $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

---

① EDL du 1^er ordre

★ Il s'agit de résoudre : $\boxed{(E): y' + a(t)y = b(t)}$ *forme normalisée*

dans laquelle a et b désignent des fonctions continues de I dans $\mathbb{K}$.

On associe à (E) une équation dite **homogène** (ou **sans second membre**): $\boxed{(H): y' + a(t)y = 0}$

★ **Structure de l'ensemble des solutions**: Les solutions de (E) s'obtiennent en faisant la somme des solutions de l'équation homogène associée (H) et d'une solution particulière de (E).

★ **Théorème de résolution de l'équation homogène**: Soit a une fonction **continue sur l'intervalle** I à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Les solutions de (H): y' + a(t)y = 0 sont les fonctions $\boxed{\begin{cases} I \to \mathbb{R} \\ t \mapsto \lambda e^{-A(t)} \end{cases}}$,

où A est une primitive de a sur I et λ une constante quelconque de $\mathbb{K}$.

Cas particulier: Si a et b sont des **constantes réelles ou complexes** avec $a \neq 0$, alors

$$\boxed{y' = ay + b \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R},\ y(t) = \lambda e^{at} - \frac{b}{a},\ \lambda \in \mathbb{K}}$$

★ **Résolution de l'équation avec second membre**

- **Etape 1**: On résout l'équation homogène en appliquant le théorème précédent.
- **Etape 2:** On cherche une solution particulière de (E)
  - ★ On cherche d'abord une solution évidente, en particulier une fonction constante.
  - ★ Si a est constante et si $b(t) = P(t)e^{mt}$ où P est un polynôme et $m \in \mathbb{C}$, on cherche une solution particulière de la forme $f(t) = Q(t)e^{mt}$ où Q est un polynôme.
    Si b(t) est un polynôme on cherchera directement un polynôme.
  - ★ Si a est constante réelle et si b(t) est la partie réelle ou imaginaire de $P(t)e^{mt}$, on se ramène au cas précédent et on prend la partie réelle ou imaginaire de la solution trouvée.
    Si $b(t) = \lambda\cos(\omega)$ ou $b(t) = \lambda\sin(\omega t)$, on pourra plutôt cherche une solution particulière de la forme $f(t) = \alpha\cos(\omega t) + \beta\sin(\omega t)$
  - ★ Si b(t) est une somme de fonctions relevant des cas précédents on applique le principe de superposition : Si $b(t) = b_1(t) + b_2(t)$, on additionne une solution particulière de $y' = a(t) = b_1(t)$ et de $y' + a(t)y = b_2(t)$
  - ★ On peut toujours utiliser la **méthode de variation de la constante**:
    On cherche une solution particulière de la forme $f: t \to \varphi(t)e^{-A(t)}$
    En injectant dans l'équation on obtient $\varphi'(t) = b(t)e^{A(t)}$, ce qui nous ramène à une recherche de primitive: $\varphi(t) = \int_{t_0}^{t} b(x)e^{A(x)}dx$ où t_0 est arbitrairement choisi dans I.

Attention méthode générale mais pouvant mener à un calcul de primitives difficile.

- **Etape 3**: Les solutions de (E) s'obtiennent en faisant la somme des solutions de (H) et de la solution particulière que l'on a trouvée.

★ **Problème de Cauchy du 1^er ordre :** Si on rajoute une condition initiale $y(t_0) = y_0$ alors la solution est unique.

② Equation différentielle linaire du second ordre à coefficients constants

★ Il s'agit de résoudre : $\boxed{(E): ay'' + by' + cy = u(t)}$

dans laquelle a, b et c sont des complexes, $a \neq 0$ et u est une fonction continue sur I.

On associe à (E) une équation dite **homogène** (ou **sans second membre**): $\boxed{(H): ay'' + by' + cy = 0}$

★ **Structure de l'ensemble des solutions**: Les solutions de (E) s'obtiennent en faisant la somme des solutions de l'équation homogène associée (H) et d'une solution particulière.

★ **Théorème de résolution de l'équation homogène :**
Soit (H): $ay'' + by' + cy = 0$, on appelle **équation caractéristique** de (E) l'équation du second degré $\boxed{(EC)\ ar^2 + br + c = 0}$ et on note $\Delta = b^2 - 4ac$ son discriminant.

• **Solutions à valeurs complexes dans le cas général:** On a $\Delta \in \mathbb{C}$, deux cas sont à considérer:

1er cas : $\Delta = 0$ alors (EC) admet une racine double r_0 et les solutions de (H) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $t \mapsto (\lambda t + \mu)e^{r_0 t}$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$.

2ème cas : $\Delta \neq 0$ alors (EC) admet deux racines complexes distinctes r_1 et r_2 et les solutions de (H) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $t \mapsto \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t}$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$.

• **Solutions à valeurs réelles dans le cas où les coefficients sont réels :**
On a $\Delta \in \mathbb{R}$, trois cas sont à considérer:

1er cas : $\Delta > 0$ alors l'équation caractéristique admet deux racines réelles r_1 et r_2 et les solutions de (H) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $t \mapsto \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t}$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

2ème cas : $\Delta = 0$ alors (EC) admet une racine double r_0 et les solutions de (H) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $t \mapsto (\lambda t + \mu)e^{r_0 t}$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

3ème cas : $\Delta < 0$ alors (EC) admet deux solutions complexes conjuguées $\alpha + i\beta$ et $\alpha - i\beta$ et les solutions de (H) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $t \mapsto e^{\alpha t}(\lambda \cos(\beta t) + \mu \sin(\beta t))$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

★ **Résolution de l'équation avec second membre**

• **Etape 1**: On résout l'équation homogène en appliquant le théorème précédent.

• **Etape 2**: On sait chercher une solution particulière f dans les cas suivants

- ★ Si u est constante, on cherche une solution constante.
- ★ Si u est un polynôme de degré n, on cherche une solution polynomiale Q.
- ★ Si $u(t) = P(t)e^{mt}$ avec P polynôme et $m \in \mathbb{C}$, on cherche une solution sous la forme $f(t) = Q(t)e^{mt}$ avec Q polynôme.
- ★ Si a, b, c réels et u(t) est la partie réelle ou imaginaire de $P(t)e^{mt}$, on se ramène au cas précédent ou bien si $u(t) = \lambda\cos(\omega t)$ ou $u(t) = \lambda\sin(\omega t)$, on cherche une solution particulière de la forme $f(t) = \alpha\cos(\omega t) + \beta\sin(\omega t)$
- ★ Si u(t) est une somme de fonctions relevant des cas précédents on applique le principe de superposition.

• **Etape 3**: On conclut: $\boxed{S_{(E)} = \{ f + h,\ h \in S_{(H)} \}}$

★ **Problème de Cauchy du 2nd ordre :** Si on rajoute deux conditions initiales, par exemple : $y(t_0) = y_0$ et $y'(t_0) = y_1$, alors la solution est unique.