Chapitre 8: Récurrences, éléments d'arithmétique-résumé de cours et TD

---

1. Le principe de récurrence et ses variantes :

Soit $\mathcal{P}(n)$ une propriété sur $\mathbb{N}$ ou une partie de $\mathbb{N}$ et $n_0 \in \mathbb{N}$.

• **Principe de récurrence:**

Si $\begin{cases} \mathcal{P}(n_0) \text{ est vraie} \\ \text{Pour tout } n \geq n_0, \left(\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)\right) \end{cases}$, alors $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$.

Vocabulaire:

★ Vérifier $\mathcal{P}(n_0)$ constitue l'**initialisation** du raisonnement par récurrence.

★ Une propriété $\mathcal{P}(n)$ vérifiant $\forall n \geq n_0$, $\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$ est dite **héréditaire**.

Attention: Une propriété peut être héréditaire et par ailleurs, fausse! L'étape d'initialisation est donc indispensable pour conclure.

★ Symboliquement, le principe s'écrit:

$$[\mathcal{P}(n_0) \text{ et } (\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0, \mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)] \Rightarrow [\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0, \mathcal{P}(n)].$$

• **Récurrence double:**

Si $\begin{cases} \mathcal{P}(n_0) \text{ et } \mathcal{P}(n_0+1) \text{ sont vraies} \\ \text{Pour tout } n \geq n_0, \left(\mathcal{P}(n) \text{ et } \mathcal{P}(n+1) \Rightarrow \mathcal{P}(n+2)\right) \end{cases}$ alors $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$.

Remarque: Ce type de récurrence s'utilise lorsque la démonstration de l'hérédité nécessite l'utilisation des deux rangs précédents.

✍ Preuve : On montre par récurrence simple que la propriété Q(n) : P(n) et P(n+1) est vraie pour tout $n \geq n_0$.

• **Récurrence forte:**

Si $\begin{cases} \mathcal{P}(n_0) \text{ est vraie} \\ \text{Pour tout } n \geq n_0, \left(\mathcal{P}(n_0), \mathcal{P}(n_0+1), \ldots, \mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)\right) \end{cases}$

alors $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$.

Remarque: Ce type de récurrence s'utilise lorsque la démonstration de l'hérédité nécessite l'utilisation de certains rangs compris entre n_0 et n ou même de tous.

✍ Preuve : On montre par récurrence simple que la propriété Q(n) : $\forall k \in [\![1, n]\!]$, P(k) est vraie pour tout $n \geq n_0$.

• **Récurrence finie:**

Si $\begin{cases} \mathcal{P}(n_0) \text{ est vraie} \\ \text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, n_0 \leq n \leq p-1, \text{si } \mathcal{P}(n) \text{ est vraie, alors } \mathcal{P}(n+1) \text{ est vraie} \end{cases}$

alors $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout n, $n_0 \leq n \leq p$

Remarque: ce type de récurrence s'utilise lorsque la propriété à démontrer n'a plus de sens à partir du rang p + 1.

Exercices d'application

① Soit u la suite définie par $u_0 = 2$, $u_1 = 3$ et $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$.
Montrer que, $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n = 2^n + 1$.

② Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que $u_0 = 1$ et $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1} \leq \sum_{k=0}^{n} u_k$.

Montrer que: $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n \leq 2^n$.

③ On donne les deux propriétés suivantes où $n\in\mathbb{N}^*$:

P(n): $\sum_{k=0}^{n} k\,k! = (n+1)! - 1$ et Q(n): $\sum_{k=0}^{n} k\,k! = (n+1)!$

a. Montrer que ces deux propriétés sont héréditaires pour tout $n\geq 1$.
b. Laquelle des deux est vraie, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$?

④ Montrer que si une trousse contient n stylos alors ils sont tous de la même couleur.

.....

Réponse: Soit P(n): Si une trousse contient n stylos alors il sont tous de la même couleur avec $n\in\mathbb{N}^*$
★ P(1) est trivialement vraie.
★ Soit $n\in\mathbb{N}$, $n \geq 1$, tel que P(n) est vraie. Considérons une trousse contenant (n+1) stylos. On enlève un stylo, la trousse contient alors n stylos tous de la même couleur, par exemple rouge, par hypothèse de récurrence. Remettons le stylo et enlevons en un autre. les n stylos restants sont encore de la même couleur, toujours rouge.
Ainsi les (n+1) stylos sont de la même couleur et P(n+1) est vraie
★ D'après le principe de récurrence, $\forall n \geq 1$, si une trousse contient n stylos alors ils sont tous de la même couleur.

Qu'en pensez-vous ?

2. Quelques éléments d'arithmétique :

2.1 Division euclidienne

Théorème et définition: Pour couple (a, b) de $\mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*$, il existe un unique couple (q, r) de $\mathbb{Z}\times\mathbb{N}$, vérifiant $a = bq + r$ et $0 \leq r < b$. On dit que q est le quotient et r le reste dans la division euclidienne de a par b.

Attention: La condition $0 \leq r < b$ est indispensable.
Le reste ne peut donc prendre que b valeurs dans $[\![0, b-1]\!]$

- **Exercice 1 :** Ecrire une fonction Python de paramètre (a, b) retournant q et r sans utiliser de division, ni de multiplication.

Proposition 1 : Soit $b\in\mathbb{N}, b \geq 2$, pour tout $r\in[\![0, b-1]\!]$, on pose $A_r = \{bk + r, k\in\mathbb{N}\}$.
La famille $(A_r)_{r\in[\![0, b-1]\!]}$ est une partition de $\mathbb{N}$.

Exemples :
- Pour b = 2, les parties $A_0 = \{2k\in\mathbb{N}\}$ et $A_1 = \{2k + 1, k\in\mathbb{N}\}$ forment une partition de $\mathbb{N}$
- Pour b = 3, les parties $A_0 = \{3k\in\mathbb{N}\}$, $A_1 = \{3k + 1, k\in\mathbb{N}\}$ et $A_2 = \{3k + 1, k\in\mathbb{N}\}$ forment une partition de $\mathbb{N}$

Dans la pratique: On peut faire une disjonction des cas en raisonnant modulo $b \geq 2$.

- **Exercice 2 :** Calculer $S_n = \sum_{k=0}^{3n} \left\lfloor \frac{2k}{3} \right\rfloor$

2.2. Multiples et diviseurs

Déf: Soient a et b deux entiers relatifs.
- On dit que b divise a lorsqu'on peut écrire $a = kb$ avec $k\in\mathbb{Z}$.

Symboliquement $b|a \Leftrightarrow \exists\, k \in \mathbb{N}$ tel que $a = kb$
- On dit que a est un multiple de b lorsque b divise a.

Remarque: L'égalité $a = kb$ donne deux diviseurs de a: b et k.

Vocabulaire: Lorsque b|a, b est un diviseur de a et a est un multiple de b.

Proposition 2: Propriétés de la relation divise: a, b et c sont des entiers relatifs
① a|a
② si b|a et a|b alors a = b ou a = -b
③ si a|b et si b|c alors a|c
④ si d|a et d|b alors $\forall(u, v)\in\mathbb{Z}^2$, d|(au + bv)

Notations
★ On note $a\mathbb{Z}$ l'ensemble des multiples de a. $n\in a\mathbb{Z} \Leftrightarrow \exists k\in\mathbb{Z}, n = ka$
Les entiers naturels pairs sont les multiples de 2 soit $2\mathbb{Z}$.

- On notera D(a) l'ensemble des diviseurs de a. D(a) contient toujours au moins 1 et a.

D(a) est une partie finie de $\mathbb{Z}$ car majorée par a et minorée par -a

Proposition 3 : Soit $(a, b)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*$, b divise a si et seulement si le reste dans la division de a par b est nul.

- **Exercice 3 :** Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}$, $(n^3 - n)$ est divisible par 3
  On proposera au moins deux méthodes différentes.

2.3 PGCD et PPCM

Def : Soit deux entiers naturels a et b non nuls.
① L'ensemble des diviseurs positifs commun à a et à b est une partie non vide et majorée de $\mathbb{N}$ qui possède un plus grand élément appelé plus grand commun diviseur de a et b et noté PGCD(a,b) ou $a \wedge b$.
② L'ensemble des multiples strictement positifs commun à a et à b est une partie non vide de $\mathbb{N}$ qui possède un plus petit élément appelé plus petit commun multiple de a et b et noté PPCM(a,b) ou $a \vee b$.

Remarque : On peut étendre ces notions aux cas suivants :
- PGCD(a, 0) = a et PPCM(a, 0) =0
- Si a et b sont dans $\mathbb{Z}$, PGCD(a, b) = PGCD(|a|, |b|) et PPCM(a, b) = PPCM(|a|, |b|)

Proposition 4 : Soit a et b deux entiers naturels non nuls,
PGCD(a, b) = a $\Leftrightarrow$ a|b et PPCM(a,b) = a $\Leftrightarrow$ b|a

- **Exercice 4** : Soit $n \in \mathbb{N}$,
  a. Montrer que le PGCD de 2n + 4 et 3n + 3 ne peut être que 1, 2, 3 ou 6.
  b. Déterminer n tel que $(2n + 4) \wedge (3n + 3) = 3$

Lemme d'Euclide : Soit a et b deux entiers naturels non nuls, et r le reste dans la division euclidienne de a par b. On a PGCD(a, b) = PGCD(b, r)

Application : algorithme d'Euclide pour l'obtention du PGCD de a et de b

On définit une suite d'entiers naturels (r_n) de la façon suivante.
$r_0 = a$ et $r_1 = b$.
Pour tout $k \geq 1$, si $r_k > 0$ alors r_{k+1} est le reste dans la division de r_{k-1} par r_k.
si $r_k = 0$ on s'arrête.
Le dernier reste non nul est alors le PGCD de a et de b

- **Exercice 5**: Compléter cette fonction Python mettant en œuvre cet algorithme.

```
def euclide(a,b) :
    r = ……
    while r > 0 :
        r =
        a = …….
        b = …….
    return ……
```

Vocabulaire :
- On dit que a et b sont premiers entre eux lorsque PGCD(a, b) = $a \wedge b = 1$.
- Une fraction est dite irréductible lorsque son numérateur et son dénominateur sont premiers entre eux.

2.4 Nombres premiers

Déf: Un entier naturel p est premier s'il admet exactement deux diviseurs positifs. En notant $\mathbb{P}$ l'ensemble des nombres premiers, on a : $p \in \mathbb{P} \Leftrightarrow D(p) = \{1, p\}$

Conséquence : 1 n'est pas premier et 2 est le seul premier pair.

Propriété 6 : Tout entier $n \geq 2$ admet au moins un diviseur premier p avec $p \leq \sqrt{n}$ si n n'est pas premier.

- **Exercice 6 :**
  a. Démontrer par récurrence forte que tout entier $n \geq 2$ admet au moins un diviseur

premier p.
Dans l'hérédité, on pourra distinguer deux cas suivant que n + 1 est ou non premier.
b. Soit n un entier non premier, en écrivant n = a.b avec $a \geq 2$ et $b \geq 2$, montrer que n admet un diviseur premier p vérifiant $p \leq \sqrt{n}$
c. Ecrire une fonction Python qui renvoie True si n est premier et False sinon.

Proposition 7 : L'ensemble des nombres premiers $\mathbb{P}$ est infini

- **Exercice 7**
  Démontrer par l'absurde la proposition 7

- **Exercice 8**
  1. Soit a et b deux entiers naturels. Montrer que si a et b ont pour reste 1 dans la division par 4, alors il en est de même pour ab.
  2. Soit p un nombre premier. Quelle peut être son reste dans la division par 4 ?
  3. Montrer par l'absurde qu'il existe une infinité de nombres premiers dont le reste dans la division par 4 est 3 *On pourra s'inspirer fortement de la démonstration précédente.*

Théorème fondamental de l'arithmétique : Tout entier $n \geq 2$ s'écrit de manière unique à l'ordre des facteurs près comme produits de nombres premiers

Exemple : $60 = 2\times30 = 2\times2\times15 = 2\times2\times3\times5 = 2^2\times3\times5$

- **Exercice 9 *Le petit théorème de Fermat*** : Soit p un nombre premier.
  a. Prouver que $\forall k \in [\![1, p-1]\!]$, $\binom{p}{k}$ est divisible par p.
  b. Montrer par récurrence sur n que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n^p - n$ est divisible par p.
  c. Déterminer tous les entiers $p \in \mathbb{P}$ tels que p divise $2^p + 1$.

- **Exercice 10 :** Déterminer par combien de zéros se termine l'entier N = 2025 !

Application au calcul du PGCD et du PPCM

• En notant $\alpha_p(n)$ l'exposant du nombre premier p dans la décomposition primaire de n avec $\alpha_p(n) > 0$ si p figure dans la décomposition et $\alpha_p(n) = 0$ sinon, on peut écrire $n = \prod_{p\in\mathbb{P}} p^{\alpha_p(n)}$.

• Le PGCD de a et de b est le produit des facteurs premiers communs aux deux décompositions, affectés du plus petit exposant rencontré.
Ou encore si $a = \prod_{p\in\mathbb{P}} p^{\alpha_p(a)}$ et $b = \prod_{p\in\mathbb{P}} p^{\alpha_p(b)}$ alors $a \wedge b = \prod_{p\in\mathbb{P}} p^{\min(\alpha_p(a),\alpha_p(b))}$
Deux nombres entiers sont premiers entre eux si et seulement si ils n'ont aucun facteur premier en commun dans leur décomposition.
• Le PPCM de a et de b est le produit des facteurs premiers présents dans chacune des deux décompositions, affectés du plus grand exposant rencontré.

Ou encore si $a = \prod_{p\in\mathbb{P}} p^{\alpha_p(a)}$ et $b = \prod_{p\in\mathbb{P}} p^{\alpha_p(b)}$ alors $a \vee b = \prod_{p\in\mathbb{P}} p^{\max(\alpha_p(a),\alpha_p(b))}$

Proposition 8 : PPCM(a, b) × PGCD(a, b) = a.b