Programme de colles-semaine 9 - 01/12 au 05/12

I. Equations différentielles linéaires

II. Récurrences, éléments d'arithmétique

- Récurrence double, récurrence forte, principe et exemples.
- Division euclidienne, raisonnement pas disjonction des cas.
- Divisibilité, PGCD et PPCM, algorithme d'Euclide
- Nombres premiers, tout entier $n \geq 2$ admet un diviseurs premiers, $\mathbb{P}$ est un ensemble infini, décomposition en produit de facteurs premiers, application au calcul du PGCD et du PPCM.

III. Ensembles et applications

- Rappel sur les ensembles.
- Application: généralités et vocabulaire, fonction indicatrice d'une partie, restrictions et prolongement, image directe et réciproque, composition.
- Application injective : def, caractérisations, exemple, toute fonction strictement monotone sur une partie I de $\mathbb{R}$ est injective, la composée de deux injections est une injection, si la composée $g \circ f$ est injective alors f est injective.
- Application surjective : def, caractérisations, exemple, la composée de deux surjection est une surjection, si la composée $g \circ f$ est surjective alors g est injective.
- Application bijective : def, caractérisations, exemple, théorème de la bijection (rappel).
- Bijection réciproque : def, exemples, si il existe g telle que $f \circ g = Id$ et $g \circ f = Id$ alors f est bijective et $g = f^{-1}$, cas particulier des involutions, la composée de deux bijections est une bijection et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$

Déroulement de la colle:

① Un calcul au verso (ou sur le même modèle)

② Une question de cours parmi

- Définition de l'image directe et réciproque, exemples.
- Définitions et caractérisations de : injection et surjection
  exemples et contre-exemples.
- Preuves de :
  si $g \circ f$ est injective alors f est injective
  si $g \circ f$ est surjective alors g est surjective
- Définition de la bijection réciproque et preuve de :
  si il existe g telle que $f \circ g = Id$ et $g \circ f = Id$ alors f est bijective et $g = f^{-1}$.

③ Exercice sur les thèmes : EDL, les récurrences et application simple du cours d'algèbre.

Evaluation: Connaître son cours est une condition nécessaire pour obtenir une note > 10

Prévisions : Ensembles et applications

Calculs de la semaine :

① Donner le module et un argument $z = 1 + e^{i\frac{5\pi}{3}}$

Réponse : $z = \sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{6}}$

② On considère f(x) = $x^n e^{-x}$. Calculer f'(x) et donner le maximum de f sur $\mathbb{R}$

Réponse : $\max f = f(n) = \left(\frac{n}{e}\right)^n$

③ Donner une primitive de $f : x \mapsto \frac{\tan^3(x)}{\cos^2(x)}$

Réponse : $F : x \mapsto \frac{\tan^4(x)}{4}$

④ Calculer l'intégrale $I_n = \int_0^{\pi/2} n\cos(t)\sin^n(t)dt$

Réponse : $I_n = \frac{n}{n+1}$

⑤ Développer f(x) = $(x^n + 1)^2 - (x + 1)^{2n}$ et donner le coefficient a_n de x^n

Réponse : $a_n = 2 - \binom{2n}{n}$