

**Exercices-Chapitre 10: Fonctions usuelles 2**

♦ Exercice corrigé - ♥ A savoir refaire

♦ 10.1 Montrer que  $\forall x \geq 0, \arctan(\operatorname{sh}x) = \arccos\left(\frac{1}{\operatorname{ch}x}\right)$ 10.2 Soit  $x > 0$ , simplifier  $\arctan(x+2) - \arctan(x)$ . En déduire  $S_n = \sum_{k=0}^n \arctan\left(\frac{2}{k^2 + 2k + 1}\right)$ .

## ♦ 10.3 Une fonction hyperbolique réciproque

a. Justifier que la restriction du cosinus hyperbolique à  $\mathbb{R}_+$  réalise une bijection de  $\mathbb{R}_+$  sur un intervalle à déterminerb. On note  $\operatorname{argch}$  la bijection réciproque.. Calculer  $\operatorname{argch}(1)$  puis établir que :

$$\forall x \in [1, +\infty[ , \operatorname{argch}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}).$$

c. Etudier la régularité de  $\operatorname{argch}$ , donner sa dérivée, son tableau de variation et sa courbe représentative.

## ♥ 10.4 Démontrer les égalités suivantes en précisant leur domaine de validité:

a.  $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2}$       b.  $\sin(\arccos x) = \sqrt{1 - x^2}$       c.  $\tan(\arcsin x) = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$

d.  $\tan(\arccos x) = \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x}$       e.  $\cos(\arctan x) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$       f.  $\sin(\arctan x) = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$

## ♥ 10.5 Valeurs exactes: Calculer:

$$\begin{array}{lll}
 A = \cos(\arccos(1/3)), & B = \sin(2\arccos(1/3)), & C = \arccos(\cos(\pi/3)) \\
 D = \arccos(\cos(-\pi/3)), & E = \arccos(\cos(10\pi/3)), & F = \arccos(\cos(\pi/3 + k\pi)) \text{ avec } k \in \mathbb{Z}.
 \end{array}$$

## 10.6 Valeurs exactes, suite : Calculer :

$$\alpha = \sin\left(\frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{7}{25}\right)\right) \quad \beta = \arctan(1/2) + \arctan(1/3) \quad \gamma = \arctan(2) + \arctan(3)$$

♦  $\delta = 2\arctan\left(\frac{1}{3}\right) + \arctan\left(\frac{1}{7}\right)$

## ♦ 10.7 Une formule pour l'argument principal d'un complexe non nul

Soit  $z = x + iy$  un complexe non nul et  $\theta \in ]-\pi, \pi]$  l'argument principal de  $z$ .a. Déterminer  $\theta$  lorsque  $z \in i\mathbb{R}$ .b. On suppose  $z \notin i\mathbb{R}$ , justifier que  $\tan \theta = y/x$ .c. En distinguant trois cas, exprimer  $\theta$  en fonction de  $x$  et  $y$ .♥ 10.8 Résoudre dans  $\mathbb{R}$ 

a.  $\arccos x = \arcsin(2x)$       b.  $\arccos(x) = \arccos\left(\frac{1}{3}\right) + \arccos\left(\frac{1}{4}\right)$

c.  $\arccos(x) + \arcsin(x^2 - x + 1) = \frac{\pi}{2}$

10.9 Représenter les fonctions définies sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \arccos(\cos x)$  et  $g(x) = \arcsin(\sin(2x))$ 

10.10 Donner le domaine de dérivabilité et la dérivée des fonctions suivantes

$$f_1 : x \mapsto \arcsin \frac{1}{x} \quad f_2 : x \mapsto \arcsin(4x) + \arccos(1 - 2x^2) \quad f_3 : x \mapsto \arccos \frac{1}{\operatorname{ch}(x)}$$

$$f_4 : x \mapsto \arctan\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \quad f_5 : x \mapsto \arcsin x - 2 \arctan \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$

♥ 10.11 On pose  $f(x) = \arccos(1 - 2x^2)$

a. Quel est l'ensemble de définition de  $f$ ?

Justifier que l'on peut restreindre l'étude de  $f$  à  $[0; 1]$ .

b. Etudier la dérivabilité de  $f$  sur  $[0; 1]$ , calculer  $f'(x)$  puis simplifier  $f(x)$ .

c. Une autre méthode : Justifier que l'on peut poser  $x = \sin t$  avec  $t \in [0; \frac{\pi}{2}]$  et conclure.

♦ 10.12 Simplifier l'expression  $g(x) = \arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$  pour  $x \in [-1, 1]$ .

♦ 10.13 Démontrer les égalités suivantes en précisant leur domaine de validité :

$$\arctan(\sqrt{1+x^2} - x) = -\frac{1}{2}\arctan(x) + \frac{\pi}{4} \qquad \arccos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right) = 2\arctan(|x|)$$

10.14 Déterminer une primitive de  $\arctan$  sur  $\mathbb{R}$ , puis de  $\arcsin$  sur  $[-1, 1]$  après avoir justifié leurs existences.

10.15 Calculer les intégrales et primitives suivantes

a.  $\int \frac{t^2}{t^2+3} dt$

b.  $\int_1^x \frac{1}{\sqrt{t}(t+3)} dt$

c.  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin^2 x + 2\cos^2 x} dx$

d.  $\int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{dx}{(2x^2+1)\sqrt{1-x^2}}$  en posant  $x = \sin(u)$  puis  $\tan(u) = t$

10.16 Déterminer une primitive de  $f$  dans chacun des cas suivants, en précisant le domaine de validité :

a.  $f : x \mapsto \frac{1}{x^2+x+1}$

b.  $f : x \mapsto \frac{2x+1}{x^2-3x+2}$

c.  $f : x \mapsto \frac{3x^2-2x+1}{(x-1)^2}$

d.  $f : x \mapsto \frac{3x^2-2x+1}{x^2+1}$

♦ 10.17 Résoudre sur  $\mathbb{R}$   $(x^2+1)^2 y' + 2x(x^2+1)y = 1$

10.18 Résoudre sur  $[-1, 1]$  l'équation  $(1-x^2)y'' - xy' + y = 0$  en posant  $x = \sin t$

### ♦ Petit Quizz: Répondre par Vrai ou Faux

•  $\arccos$  est définie sur  $[0, \pi]$

•  $\arccos$  est bornée sur  $\mathbb{R}$ .

•  $\arcsin$  est définie sur  $[-1, 1]$

•  $\arctan x = \frac{\arcsin x}{\arccos x}$

•  $\cos(\arccos(0,2)) = 0,2$

•  $\arccos(\cos(-\frac{\pi}{3})) = -\frac{\pi}{3}$

•  $\arctan$  est bornée

•  $\arctan(\tan(\frac{3\pi}{4})) = -\frac{\pi}{4}$

•  $\arcsin$  est dérivable sur  $[-1, 1]$  et  $\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

### Calculus

