

Exercices-Chapitre 10: Fonctions usuelles 2

♦ Exercice corrigé - ♥ A savoir refaire

♦ 10.1 Montrer que $\forall x \geq 0$, $\arctan(\operatorname{sh}x) = \arccos\left(\frac{1}{\operatorname{ch}x}\right)$ 10.2 Soit $x > 0$, simplifier $\arctan(x+2) - \arctan(x)$. En déduire $S_n = \sum_{k=0}^n \arctan\left(\frac{2}{k^2+2k+1}\right)$.

♦ 10.3 Une fonction hyperbolique réciproque

a. Justifier que la restriction du cosinus hyperbolique à \mathbb{R}_+ réalise une bijection de \mathbb{R}_+ sur un intervalle à déterminerb. On note argch la bijection réciproque.. Calculer $\operatorname{argch}(1)$ puis établir que :

$$\forall x \in [1, +\infty[, \operatorname{argch}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$$

c. Etudier la régularité de argch , donner sa dérivée, son tableau de variation et sa courbe représentative.

♥ 10.4 Démontrer les égalités suivantes en précisant leur domaine de validité:

a. $\cos(\arcsinx) = \sqrt{1 - x^2}$ b. $\sin(\arccos x) = \sqrt{1 - x^2}$ c. $\tan(\arcsinx) = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$

d. $\tan(\arccos x) = \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x}$ e. $\cos(\arctan x) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$ f. $\sin(\arctan x) = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$

♥ 10.5 Valeurs exactes: Calculer:

A = $\cos(\arccos(1/3))$, B = $\sin(2\arccos(1/3))$, C = $\arccos(\cos(\pi/3))$
D = $\arccos(\cos(-\pi/3))$, E = $\arccos(\cos(10\pi/3))$, F = $\arccos(\cos(\pi/3 + k\pi))$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

10.6 Valeurs exactes, suite : Calculer :

$$\alpha = \sin\left(\frac{1}{2} \arcsin\left(\frac{7}{25}\right)\right) \quad \beta = \arctan(1/2) + \arctan(1/3) \quad \gamma = \arctan(2) + \arctan(3)$$

♦ $\delta = 2\arctan\left(\frac{1}{3}\right) + \arctan\left(\frac{1}{7}\right)$

♦ 10.7 Une formule pour l'argument principal d'un complexe non nul

Soit $z = x + iy$ un complexe non nul et $\theta \in]-\pi, \pi]$ l'argument principal de z .a. Déterminer θ lorsque $z \in i\mathbb{R}$.b. On suppose $z \notin i\mathbb{R}$, justifier que $\tan\theta = y/x$.c. En distinguant trois cas, exprimer θ en fonction de x et y .♥ 10.8 Résoudre dans \mathbb{R}

a. $\arccos x = \arcsin(2x)$ b. $\arccos(x) = \arccos\left(\frac{1}{3}\right) + \arccos\left(\frac{1}{4}\right)$

c. $\arccos(x) + \arcsin(x^2 - x + 1) = \frac{\pi}{2}$

10.9 Représenter les fonctions définies sur \mathbb{R} par $f(x) = \arccos(\cos x)$ et $g(x) = \arcsin(\sin(2x))$

10.10 Donner le domaine de dérivation et la dérivée des fonctions suivantes

$$f_1 : x \mapsto \arcsin\frac{1}{x} \quad f_2 : x \mapsto \arcsin(4x) + \arccos(1 - 2x^2) \quad f_3 : x \mapsto \arccos\frac{1}{\operatorname{ch}(x)}$$

$$f_4 : x \mapsto \arctan\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \quad f_5 : x \mapsto \arcsin x - 2 \arctan\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$

♥ 10.11 On pose $f(x) = \arccos(1 - 2x^2)$

a. Quel est l'ensemble de définition de f ?

Justifier que l'on peut restreindre l'étude de f à $[0;1]$.

b. Etudier la dérivabilité de f sur $[0;1]$, calculer $f'(x)$ puis simplifier $f(x)$.

c. Une autre méthode : Justifier que l'on peut poser $x = \sin t$ avec $t \in [0; \frac{\pi}{2}]$ et conclure.

♦ 10.12 Simplifier l'expression $g(x) = \arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$ pour $x \in [-1, 1]$.

♦ 10.13 Démontrer les égalités suivantes en précisant leur domaine de validité :

$$\arctan\left(\sqrt{1+x^2} - x\right) = -\frac{1}{2}\arctan(x) + \frac{\pi}{4}$$

$$\arccos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right) = 2\arctan(|x|)$$

10.14 Déterminer une primitive de \arctan sur \mathbb{R} , puis de \arcsin sur $[-1, 1]$ après avoir justifié leurs existences.

10.15 Calculer les intégrales et primitives suivantes

a. $\int \frac{t^2}{t^2+3} dt$

b. $\int_1^x \frac{1}{\sqrt{t}(t+3)} dt$

c. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin^2 x + 2 \cos^2 x} dx$

d. $\int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{dx}{(2x^2+1)\sqrt{1-x^2}}$ en posant $x = \sin(u)$ puis $\tan(u) = t$

10.16 Déterminer une primitive de f dans chacun des cas suivants, en précisant le domaine de validité :

a. $f: x \mapsto \frac{1}{x^2+x+1}$ b. $f: x \mapsto \frac{2x+1}{x^2-3x+2}$ c. $f: x \mapsto \frac{3x^2-2x+1}{(x-1)^2}$ d. $f: x \mapsto \frac{3x^2-2x+1}{x^2+1}$

♦ 10.17 Résoudre sur \mathbb{R} $(x^2 + 1)^2 y' + 2x(x^2 + 1)y = 1$

10.18 Résoudre sur $[-1, 1]$ l'équation $(1 - x^2)y'' - xy' + y = 0$ en posant $x = \sin t$

♦ Petit Quizz: Répondre par Vrai ou Faux

• \arccos est définie sur $[0, \pi]$

• \arccos est bornée sur \mathbb{R} .

• \arcsin est définie sur $[-1, 1]$

• $\arctan x = \frac{\arcsin x}{\arccos x}$

• $\cos(\arccos(0,2)) = 0,2$

• $\arccos(\cos(-\frac{\pi}{3})) = -\frac{\pi}{3}$

• \arctan est bornée

• $\arctan(\tan(\frac{3\pi}{4})) = -\frac{\pi}{4}$

• \arcsin est dérivable sur $[-1, 1]$ et $\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Calculus

