

Programme de colles-semaine 10 - 08/12 au 12/12

I. Ensembles et applications

- Rappel sur les ensembles.
- Application: généralités et vocabulaire, fonction indicatrice d'une partie, restrictions et prolongement, image directe et réciproque, composition.
- Application injective : def, caractérisations, exemple, toute fonction strictement monotone sur une partie I de \mathbb{R} est injective, la composée de deux injections est une injection, si la composée gof est injective alors f est injective.
- Application surjective : def, caractérisations, exemple, la composée de deux surjection est une surjection, si la composée gof est surjective alors g est injective.
- Application bijective : def, caractérisations, exemple, théorème de la bijection (rappel).
- Bijection réciproque : def, exemples, si il existe g telle que $fog = \text{Id}$ et $gof = \text{Id}$ alors f est bijective et $g = f^{-1}$, cas particulier des involutions, la composée de deux bijections est une bijection et $(gof)^{-1} = f^{-1}og^{-1}$

II. Fonctions usuelles 2

- \arccos , \arcsin , \arctan
- Applications : équations trigonométriques, calcul d'intégrales et de primitives

$$\int \frac{dt}{a^2 + t^2} \text{ et } \int \frac{dt}{\sqrt{a^2 - t^2}} \text{ en posant } u = at$$

$$\int \frac{dt}{at^2 + bt + c} \text{ en fonction des racines du dénominateur}$$

Déroulement de la colle:

- ① Un calcul au verso (ou sur le même modèle)
 - ② Deux questions de cours parmi
 - Preuve de gof est injective $\Rightarrow f$ est injective
 - Preuve de gof est surjective $\Rightarrow g$ est surjective.
 - Preuve de $\forall A, B \in \mathcal{P}(E), f(A \cap B) = f(A) \cap f(B) \Leftrightarrow f$ est injective
 - Définition et étude rapide de \arccos , \arcsin ou \arctan
 - Calcul de $\arctan(x) + \arctan(\frac{1}{x})$ pour $x \in \mathbb{R}^*$
 - ③ Exercice sur les thèmes : Ensembles et applications, utilisation des nouvelles fonctions usuelles
-

Evaluation: Connaître son cours est une condition nécessaire pour obtenir une note > 10

Calculs de la semaine :

① Calculer $\cos(2\arcsin(1/4))$

Réponse : 7/8

② On considère $f(x) = x^n e^{-x}$. Calculer $f'(x)$ et donner le maximum de f sur \mathbb{R}_+

Réponse : $\max_{\mathbb{R}_+} f = f(n) = \left(\frac{n}{e}\right)^n$

③ Donner une primitive de $f : x \mapsto \frac{1}{x^2 - 3x + 2}$

Réponse : $F : x \mapsto -\ln|x-1| + \ln|x-2|$

④ Donner une primitive de $f : x \mapsto \frac{1}{x^2 + 2x + 2}$

Réponse : $F : x \mapsto \arctan(x+1)$

⑤ Calculer $\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{t}(t+1)} dt$ en posant $u = \sqrt{t}$

Réponse : $F : x \mapsto 2\arctan(\sqrt{2}) - \frac{\pi}{2}$